Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)

David Wierichs, David Gross

Übungsblatt 8 **Abgabe: 30.05.**

1 Elektronenspins in Magnetfeldern

In dieser Aufgabe werden wir uns mit Spin-$\frac{1}{2}$-Freiheitsgraden beschäftigen. Sie beschreiben zum Beispiel den Eigendrehimpuls eines Elektrons. Praktisch ermöglichen uns die Resultate dieses Blatts, die Grundlagen der Magnetresonanztomographie (MRT) zu verstehen (also, grob jedenfalls ☺).

a) Die *Pauli-Matrizen* sind definiert als

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Berechnen Sie normierte Eigenvektoren von $\hat{\sigma}_x$ sowie von $\hat{\sigma}_z$.

Hinweis: Dazu brauchen Sie nicht die allgemeine Maschinerie der linearen Algebra anzuwenden. Schreiben Sie stattdessen die Eigenwertgleichung für einen allgemeinen Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ auf und lösen Sie das resultierende Gleichungssystem.

b) Für einen Zustandsvektor $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ lassen sich die Erwartungswerte der Pauli-Matrizen berechnen, indem man die Matrix auf den Zustand anwendet und anschließend das Skalarprodukt mit dem komplex konjugierten ψ berechnet. Zum Beispiel:

$$\langle \sigma_y \rangle_\psi = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -ib \\ ia \end{pmatrix} = i(ab^* - a^*b) = -2\mathrm{Im}(ab^*) \tag{2}$$

Zeigen Sie dass $\langle \hat{\sigma}_x \rangle_\psi = 2\mathrm{Re}(ab^*)$ und $\langle \hat{\sigma}_z \rangle_\psi = |a|^2 - |b|^2$.

c) Ein Elektron befinde sich in einem homonenen magnetischen Feld parallel zur y-Richtung. In diesem Fall ist der Hamiltonoperator durch $\hat{H} = \frac{eB\hbar}{2m}\hat{\sigma}_y$ gegeben. Der Spin des Elektrons befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $\psi(0) = \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix}$. *Bestimmen Sie $\psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$, indem Sie die Schrödingergleichung $i\hbar\partial_t\psi(t) = \hat{H}\psi(t)$ mit den gegebenen Anfangsbedingungen lösen.* Die Abkürzung $\omega = \frac{eB}{2m}$ spart dabei etwas Schreibarbeit.

Hinweis: Die Schrödingergleichung liefert Ihnen zwei gekoppelte Differentialgleichungen für $a(t)$ und $b(t)$. Wenn man die Gleichunen ein zweites Mal nach der Zeit ableitet, kann man sie ineinander einsetzen und so entkoppeln.

d) OK, hier ist die Lösung der letzten Teilaufgabe:

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} a(0)\cos(\omega t) - b(0)\sin(\omega t) \\ a(0) sin(\omega t) + b(0)\cos(\omega t) \end{pmatrix}.$$

Wir geben sie erst hier an, damit Sie nicht auf die Idee kommen, sie als Ansatz einfach in die Schrödingergleichung einzusetzen und zu überprüfen, dass es eine Lösung ist. Wir erwarten eine nachvollziehbare Herleitung.

*Berechnen Sie die Zeitentwicklung aus **c)** für $\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Wie verhält sich der Zustand $\psi(t)$ zum Zeitpunkt t zu $\psi(0)$? Bestimmen Sie mit Hilfe von **b)** die zeitabhängigen Erwartungswerte $\langle \hat{\sigma}_x \rangle_{\psi(t)}$, $\langle \hat{\sigma}_y \rangle_{\psi(t)}$ sowie $\langle \hat{\sigma}_z \rangle_{\psi(t)}$.*

e) *Berechnen Sie die Zeitentwicklung aus* **c)** *für* $\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*. Bestimmen Sie mit Hilfe von* **b)** *die zeitabhängigen Erwartungswerte* $\langle \hat{\sigma}_x \rangle_{\psi(t)}$, $\langle \hat{\sigma}_y \rangle_{\psi(t)}$ *sowie* $\langle \hat{\sigma}_z \rangle_{\psi(t)}$.

Hinweis: Nutzen Sie Additionstheoreme um einfache Ausdrücke für das Ergebnis zu erhalten.

Interpretation: Es gibt eine anschauliche Darstellung für Zustände eines Spin-$\frac{1}{2}$-Freiheitsgrades, die sogenannte *Bloch-Kugel*. Schreiben wir die (stets reellen) Erwartungswerte der Pauli-Matrizen in einen Vektor

$$v(\psi) = \begin{pmatrix} \langle \hat{\sigma}_x \rangle_\psi \\ \langle \hat{\sigma}_y \rangle_\psi \\ \langle \hat{\sigma}_z \rangle_\psi \end{pmatrix}, \tag{3}$$

so kann man zeigen, dass dieser für alle ψ die Länge 1 hat, also einem Punkt auf einer Kugeloberfläche im $\mathbb{R}^3$ entspricht:

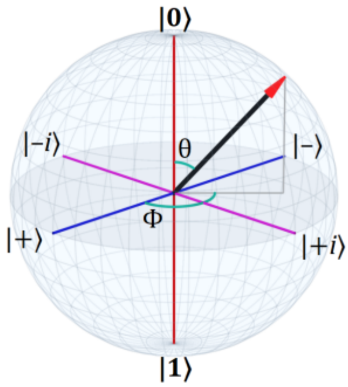

Abbildung 1: Die Bloch-Kugel mit einem frei gewählten Zustand $v(\psi)$ (schwarz-roter Pfeil), sowie den Eigenzuständen der Pauli-Matrizen: $|0\rangle$ und $|1\rangle$ für $\hat{\sigma}_z$, $|+\rangle$ und $|-\rangle$ für $\hat{\sigma}_x$ sowie $|+i\rangle$ und $|-i\rangle$ für $\hat{\sigma}_y$. Bildquelle.

In den Teilaufgaben **d)** und **e)** haben wir festgestellt, dass sich die Zeitentwicklung stark unterscheidet, wenn wir mit $\psi_0 = |+i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ oder mit $\psi_0 = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ starten. Beide Ergebnisse sind mit folgender Interpretation zusammen zu fassen: Der Hamiltonoperator $\omega\hbar\hat{\sigma}_y$ sorgt für *Rotationen* auf der Bloch-Kugel um die y-Achse.

Im MRT kann man sich diese Dynamik zu Nutze machen, indem man verschiedene Rotationen, also Magnetfelder mit verschiedenen Ausrichtungen, geschickt kombiniert. Die Elektronen-Eigendrehimpulse im untersuchten Material senden dann nach einer charakteristischen Zeit ein sogenanntes *Spin-Echo* aus, welches gemessen werden kann.