Theoretische Physik II (Lehramt, Geophysik, Wahlfach)

David Wierichs, David Gross

Übungsblatt 9 **Abgabe:** 13.06.

1 Vielteilchensysteme, Verschränkung, Bell-Ungleichungen

In dieser Woche haben wir die Bellschen Ungleichungen betrachtet, die elementare Annahmen des klassischen Weltbilds als mit empirischen Daten unvereinbar identifizieren. Wir haben uns auch ein quantenmechanisches Modell für das Bellexperiment angesehen. Dabei blieben einige Schritte offen. Auf diesem Zettel werden wir diese Schritte nachvollziehen und einen weiteren wichtigen verschränkten Zustand, den *Singulett-Zustand*, kennenlernen.

Zunächst eine Zusammenfassung der in der Vorlesung behandelten Rechenregeln für die quantenmechanische Beschreibung von zwei Spin-1/2-Systemen. Im Gesamthilbertraum verwenden wir die Orthonormalbasis

$$|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle, \quad |\uparrow\rangle|\downarrow\rangle, \quad |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle, \quad |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle.$$

Wenn sich der erste Spin im Zustand $|\alpha\rangle = \alpha_\uparrow|\uparrow\rangle + \alpha_\downarrow|\downarrow\rangle$ und der zweite Spin im Zustand $|\beta\rangle = \beta_\uparrow|\uparrow\rangle + \beta_\downarrow|\downarrow\rangle$ befindet, so gilt für den Gesamtzustand

$$|\alpha\rangle|\beta\rangle = (\alpha_\uparrow|\uparrow\rangle + \alpha_\downarrow|\downarrow\rangle)(\beta_\uparrow|\uparrow\rangle + \beta_\downarrow|\downarrow\rangle) = \alpha_\uparrow\beta_\uparrow|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \alpha_\uparrow\beta_\downarrow|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + \alpha_\downarrow\beta_\uparrow|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + \alpha_\downarrow\beta_\downarrow|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle.$$

Wenn $\hat{A}^{(1)}$ ein Operator auf dem ersten Teilsystem ist, dann wirkt er auf den ersten Faktor eines Produktterms

$$\hat{A}^{(1)}(|\alpha\rangle|\beta\rangle) = (\hat{A}|\alpha\rangle)|\beta\rangle,$$

und analog für Operatoren $\hat{A}^{(2)}$ auf dem zweiten Teilsystem.

a) Im Folgenden sei

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle)$$

der verschränkte Zustand, für den wir eine Verletzung von Bell-Ungleichungen nachgewiesen haben. *Zeigen Sie die folgenden Relationen*, die in der Vorlesung behauptet, aber nicht explizit bewiesen wurden:

$$\langle\Phi^+|\hat{\sigma}_x^{(1)}\hat{\sigma}_x^{(2)}|\Phi^+\rangle = 1, \qquad \langle\Phi^+|\hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{\sigma}_x^{(2)}|\Phi^+\rangle = 0.$$

Zusammen mit den in der Vorlesung bewiesenen Relationen gilt damit also

$$\langle\Phi^+|\hat{\sigma}_i^{(1)}\hat{\sigma}_j^{(2)}|\Phi^+\rangle = \delta_{ij} \tag{1}$$

für $i, j \in \{x, z\}$.

b) Es seien

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ v_z \end{pmatrix}, \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ 0 \\ w_z \end{pmatrix},$$

zwei Einheitsvektoren in der x-z-Ebene. Sei

$$\hat{L}_{\vec{v}} = v_x \hat{\sigma}_x + v_z \hat{\sigma}_z$$

der Operator der die Messung der Drehimpulskomponente entlang der $\vec{v}$-Achse beschreibt (dabei verwenden wir Einheiten, so dass die Eigenwerte ± 1 statt $\pm\frac{\hbar}{2}$ sind). Der Operator $\hat{L}_{\vec{w}}$ ist analog definiert. *Benutzen Sie (1) um zu zeigen, dass*

$$\langle \Phi^+ | \hat{L}_{\vec{v}}^{(1)} \hat{L}_{\vec{w}}^{(2)} | \Phi^+ \rangle = (\vec{v}, \vec{w})$$

gilt, wobei $(\vec{v}, \vec{w}) = v_x w_x + v_z w_z$ das übliche Euklidsche Skalarprodukt ist.

Hinweis: Einfach mal einsetzen, dann ist es eine kurze Rechnung.

c) Der Zustand

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle))$$

heißt *Singulettzustand*. *Argumentieren Sie wie in der Vorlesung und zeigen Sie, dass der Singulettzustand verschränkt ist. Zeigen Sie außerdem*

$$\langle \Psi^- | \hat{\sigma}_z^{(1)} \hat{\sigma}_z^{(2)} | \Psi^- \rangle = \langle \Psi^- | \hat{\sigma}_x^{(1)} \hat{\sigma}_x^{(2)} | \Psi^- \rangle = -1.$$

Begründen Sie, warum aus der zweiten Relation folgende physikalische Interpretation folgt: "Misst man den Drehimpuls der beiden Teilchen jeweils in x-Richtung, so erhält man stets unterschiedliche Ergebnisse (also $+1$ bei ersten und -1 beim zweiten Teilchen oder umgekehrt), nie aber gleiche".

Anmerkung: Man kann leicht allgemeiner zeigen, dass diese strenge Antikorrelation für *beliebige* Drehimpulskomponenten gilt, nicht nur für die x- und z-Komponente. Da die beiden Teilchen im Singulettzustand also stets entgegengesetzte Drehimpulskomponenten haben, folgt, dass der Gesamtdrehimpuls der beiden Teilchen verschwindet. Wir haben gesehen, dass ein einzelnes Spin-1/2-Teilchen in einem inhomogenen Magnetfeld *immer* abgelenkt wird (in eine von zwei Richtungen). Ein mechanisch gekoppeltes System aus zwei Spin-1/2-Teilchen im Singulettzustand spürt den Einfluss von Magnetfeldern aufgrund des verschwindenden Gesamtdrehimpulses hingegen nicht! Man kann zeigen, dass der Singulettzustand der einzige Zustand von zwei Spin-1/2-Teilchen ist, der diese Eigenschaft hat – daher der Name. Allgemeiner werden solche Effekte in der Theorie der *Kopplung quantenmechanischer Drehimpulse* untersucht. Die Theorie ist leider nicht ganz trivial und wird daher hier nicht besprochen werden.