Quantenmechanik

Mariami Gachechiladze, David Gross

Übungsblatt 1 (Freiwilliger Bonuszettel) **Abgabe: 18.04.**

1 Fouriertransformation (7 P)

Wir haben bereits in der Einführung angedeutet, dass die Fouriertransformation eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik spielt, z.B. für die Beschreibung von Impulsmessungen. Daher betrachten wir hier einige Eigenschaften der Transformation. Das Thema wird uns später noch häufig beschäftigen!

Im Folgenden ist $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die im Unendlichen gegen 0 geht: $\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 0$. Die Fouriertransformation ist gegeben durch

$$\mathcal{F}[\psi](k) = \widetilde{\psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, e^{-ikx} \psi(x) \,,$$

mit inverser Transformation

$$\mathcal{F}^{-1}[\widetilde{\psi}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \, e^{ikx} \widetilde{\psi}(k) = \psi(x).$$

a) **(1 P)** Zeigen Sie:

$$\psi(x) = \psi^*(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \widetilde{\psi}^*(k) = \widetilde{\psi}(-k),$$

wobei der Stern komplexe Konjugation bedeutet.

Bemerkung: Daraus folgt, dass die Impulsverteilung eines Teilchens, das durch eine reelle Wellenfunktion beschrieben wird, invariant unter einer Reflektion am Urpsrung ist. Vergl. mit dem Bsp. in Abschnitt 1.3.1.

b) **(4 P)** Wir definieren den Translationsoperator T_a, den Multiplikationsoperator X und den Dilatationsoperator D_a durch

$$(T_a\psi)(x) = \psi(x-a), \qquad (X\psi)(x) = x\psi(x), \qquad (D_a\psi)(x) = \psi(ax).$$

Die Ableitung von ψ wird mit ψ' bezeichnet. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[T_a\psi](k) &= e^{-ika}\widetilde{\psi}(k) \,, \\ \mathcal{F}[\psi'](k) &= i(X\widetilde{\psi})(k) \,, \\ \mathcal{F}[X\psi](k) &= i\widetilde{\psi}'(k) \,, \\ \mathcal{F}[D_a\psi](k) &= \frac{1}{a}\widetilde{\psi}\left(\frac{k}{a}\right) . \end{aligned}$$

Hinweis: Partielle Integration. Ein Einschieben von $\psi = \mathcal{F}^{-1}[\widetilde{\psi}]$ könnte helfen.

Bemerkung: Die zweite Eigenschaft wird für die Definition des Impulsoperators wichtig sein. Die vierte ist eng mit der Unschärferelation verknüpft.

c) **(2 P)** Sei $\psi(x) = e^{-x^2}$. Das Integral, das $\widetilde{\psi}$ definiert ist schwer direkt zu lösen. Wir gehen daher indirekt vor. Zeigen Sie die Relation

$$\frac{\partial}{\partial k}\widetilde{\psi}(k) = -\frac{k}{2}\widetilde{\psi}(k).$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung. Die Lösung ist bis auf eine Normierungskonstante eindeutig. Diese Konstante muss hier nicht bestimmt werden. **Hinweis:** Drücken Sie die k-Ableitung im Integranden als x-Ableitung aus. Partielle Integration ist Ihr Freund.

Bemerkung: Mit dieser Übung und der vierten zuvor gezeigten Eigenschaft kann man die Impulsverteilung aus Abschnitt 1.3.1 bestimmen.