Quantenmechanik

Mariami Gachechiladze, David Gross

Übungsblatt 10 **Abgabe: 27.06.21**

In dieser Woche geht es um die quantenmechanische Behandlung von Zentralpotentialen. Das wichtigste Beispiel ist das Wasserstoffatom. Man kann dessen stationäre Schrödingergleichung in Kugelkoordinaten explizit lösen, oder das Problem mit Hilfe des Runge-Lenz-Vektors algebraisch angehen. Leider sind *beide* Ansätze sind nicht ganz leicht... :-(

Um ein besseres Gefühl für diese Art von Problemen zu bekommen, betrachten wir hier ein viel leichteres Zentralpotential: den isotropen harmonischen Oszillator. Dieser kann algebraisch sehr leicht gelöst werden. Die Behandlung in Kugelkoordinaten ist schwieriger, hilft aber (hoffentlich) beim Verstn̈dnis des H-Atoms.

1 Isotroper dreidimensionaler harmonischer Oszillator (10 P)

Gegeben sei das Potential des isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators:

$$V(\vec{r}) = \tfrac{1}{2} m\omega^2 \, \|\vec{r}\|^2.$$

Im Folgenden bestimmen wir die Bindungsenergien E_n des Systems auf zwei verschiedene Arten.

a) **(2 P)** Verwenden Sie einen Separationsansatz in kartesischen Koordinaten und zeigen Sie, dass dies auf drei unabhängige eindimensionale harmonische Oszillatoren führt. Bestimmen Sie die Eigenenergien E_n und deren Entartungsgrad $d(n)$. **Hinweis:** Kap. 6 der VL kann hilfreich sein.

b) **(8 P)** Wiederholen Sie das ganze nun in Kugelkoordinaten. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Transformieren Sie die stationäre Schrödingergleichung in Kugelkoordinaten. Machen Sie einen Separationsansatz $\psi(\vec{x}) = R(r)\, Y_{lm}(\theta, \phi)$ und zeigen Sie, dass sich zwei unabhängige Differentialgleichung für Radial- und Winkelanteil ergeben. **Hinweis:** Folgen Sie ruhig eng der VL.

(ii) Bringen Sie die Differentialgleichungen für den Radialteil in die Form

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(r\,\cdot\,) - \frac{l(l+1)}{r^2} - \gamma^2 r^2 + \lambda^2\right] R(r) = 0$$

Wie hängen die Konstanten λ und γ von $m, \omega, \hbar$ und der Energie ab?

(iii) Machen Sie nun den Ansatz $R(r) = r^l e^{-\gamma r^2/2} \chi(r)$. **Bonuspunkt**: Rechtfertigen Sie den Ansatz durch Betrachung des asymptotischen Verhaltens der DGL.

(iv) Leiten Sie die Differentialgleichung für $\chi(r)$ her und bringen Sie diese auf die Form der Differentialgleichung der Laguerre-Polynome,

$$x\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} L_k^\alpha(x) + (\alpha + 1 - x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} L_k^\alpha(x) + k L_k^\alpha(x) = 0$$

Bestimmen Sie die Energieeigenwerte E_{kl}.

(v) Führen Sie analog zum Wasserstoffatom eine Hauptquantenzahl n ein. Welche Werte kann l für gegebenes n annehmen? Bestimmen Sie den Entartungsgrad $d(n)$ der Energieeigenwerte E_n.