

QUANTENMECHANIK

Mariami Gachechiladze, David Gross

Übungsblatt 11 Abgabe: 04.07.21

1 Störungstheorie und der Zeemaneffekt (Einfachheit halber ohne Spin) (10 P)

Der Hamiltonoperator für ein Teilchen (Ladung $-e$, Masse m) in einem elektromagnetischen Feld, gegeben durch ein Vektorpotential \vec{A} lautet

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} + e\vec{A}(\vec{X}, t) \right)^2 - \frac{e^2}{r}.$$

Ein Wasserstoffatom sei einem homogenen, zeitlich konstanten Magnetfeld \vec{B} ausgesetzt.

a) (1 P) Zeigen Sie, dass ein Vektorpotential für dieses \vec{B} gegeben ist durch $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{X}$. Von nun an gehen wir davon aus, dass das Magnetfeld parallel zur e_z -Richtung liegt: $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

b) (2 P) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator geschrieben werden kann als $H = H_0 + H_1 + H_2$, wobei

$$H_0 = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \frac{e^2}{r}, \quad H_1 = \frac{e}{2m} \vec{B} \cdot \vec{L}, \quad H_2 = \frac{e^2}{8m} \vec{B}^2 \vec{R}_\perp^2,$$

mit $\vec{R}_\perp^2 = x^2 + y^2$.

c) (1 P) Wir vernachlässigen zunächst den Term H_2 . Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen $\psi_{n,l,m}$ von $H_0 + H_1$ die (aus der Vorlesung bekannten) Eigenfunktionen des freien Wasserstoffproblems sind, aber die Energien wie folgt verschoben sind:

$$E'_{n,l,m} = E_n + m\mu_B B.$$

Hierbei sind E_n die Eigenenergien des ungestörten Atoms und $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$.

Hinweis: Zeigen Sie dass $[H_0, H_1] = 0$. Was passiert mit den Eigenwerten und Eigenvektoren von H_0 , wenn man ein kommutierendes H_1 addiert? Verwenden Sie an dieser Stelle *keine* Störungstheorie.

d) (1 P) Bei starkem B wird H_2 relevant. Zeigen Sie, dass gilt:

$$H_2 = \frac{e^2 B^2}{8m} r^2 \sin^2 \vartheta.$$

e) (3 P) Berechnen Sie die Energiekorrektur erster Ordnung zum Grundzustand $\psi_{1,0,0}$.

Hinweis: Der korrekt normierte Ausdruck für die Grundzustandswellenfunktion ist $\psi_{1,0,0} = 2(a_0)^{-3/2} e^{-\frac{r}{2a_0}}$.

f) (2 P) Die Energien des Wasserstoffatoms oberhalb des Grundzustands sind entartet. Die Energiekorrekturen zu E_n werden von den Eigenwerten der folgenden Matrix abhängen:

$$E_{(k,l),(k',l')}^{(1)} = \langle \psi_{n,k,l} | H_2 | \psi_{n,k',l'} \rangle.$$

Um den Einfluß von H_2 zu berücksichtigen, müssen Sie also wieder Matrixelemente der Störung berechnen. Durch Ausnutzung von Symmetrien kann man hierbei Arbeit sparen. Zeigen Sie, dass die Matrixelemente von H_2 nur zwischen Zuständen gleicher Parität und gleicher m -Quantenzahl nicht verschwinden. (Solche Einschränkungen nimmt man manchmal

Auswahlregeln). Welche der Matrixelemente $\langle \psi_{n,l,m} | H_2 | \psi_{n,l',m'} \rangle$ für $n = 3$ können verschieden von Null sein?

Hinweis: Die Parität ist definiert als Erwartungswert des Operators Π mit $(\Pi\psi)(x) = \psi(-x)$. Für die Eigenzustände des Wasserstoffatoms gilt $\langle n\ell m | \Pi | n\ell m \rangle = (-1)^l$.