Quantenmechanik

Mariami Gachechiladze, David Gross

Übungsblatt 12 **Abgabe: 11.07.21**

In diesem Blatt geht es um Quantengatter und Quantenschaltkreise. Darauf aufbauend werden wir dann einen einfachen Quantenalgorithmus besprechen. Da wir die regulären Themen abgearbeitet haben, ist dies ein Bonuszettel (dafür gibt es etwas weniger Punkte).

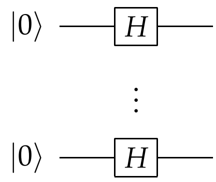
1 Beschreibung von Systemen aus mehreren Qubits

a) **(1 P)** Das *Hadamard*-Gatter für ein Qubit ist durch die Matrix

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ definiert, also $H|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^x|1\rangle)$. Berechnen Sie $(H \otimes H)(|0\rangle|0\rangle)$. Geben Sie die Matrixdarstellung von $H \otimes H$ bezüglich der Produktbasis $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ an.

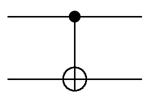
b) **(1 P)** Nun für beliebige n: Geben Sie einen Ausdruck für $H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n}$ an. **Anmerkung**: Unten steht der entsprechende Quantenschaltkreis. Viele Quantenalgorithmen beginnen mit diesem "Hadamard-Schritt".



c) **(1 P)** Welche möglichen Ergebnisse könnten eintreten und mit welcher Wahrscheinlichkeit, wenn wir jedes der n Qubits in Pauli-Z-Eigenbasis messen? Was passiert, wenn wir jedes der n Qubits in Pauli-X-Eigenbasis messen?

d) **(1 P)** Das $\mathrm{CNOT}^{(ij)}$-Gatter wirkt auf zwei Qubits. Wenn das i-te Qubit im Zustand $|1\rangle$ ist, invertiert es das j-te Qubit. Die Matrixdarstellung bezüglich der Produktbasis, sowie das Symbol in Quantenschaltkreisen sind:

$$\mathrm{CNOT}^{(12)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

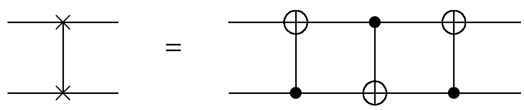


.

Dabei steht der schwarze Punkt für das kontrollierende System, und das $\oplus$-Symbol für das kontrollierte. Geben Sie die Matrixdarstellung für $\mathrm{CNOT}^{(21)}$ an. Überprüfen Sie die Formel

$$\mathrm{CNOT}^{(12)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \sigma_x. \tag{1}$$

e) **(1 P)** Zeigen Sie, dass der folgende Schaltkreis ein SWAP-Gatter implementiert, das die Zustände der beiden Qubits vertauscht: SWAP $|\alpha\rangle|\beta\rangle = |\beta\rangle|\alpha\rangle$.



Kann das SWAP-Gate Verschränkung erzeugen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis: Verwenden Sie nicht den Matrixformalismus diesen Schaltkreis. Betrachten Sie stattdessen, wie die er die Elemente der Produktbasis wirkt.