Quantenmechanik

Mariami Gachechiladze, David Gross

Übungsblatt 2 **Abgabe: 25.04.**

Diese Woche geht es um Hilbertraumgeometrie. Wir gehen auf diesem Zettel die Probleme durch, die in den Vorlesungsvideos offen geblieben sind. Hintergründe zu den Aufgaben gibt es also jeweils in den Videos und im Skript.

Physik machen wir dann ab Woche drei. Halten Sie durch!

1 Lektkion 3.4: Basen, Matrixdarstellungen, und Diracformalismus

a) (1 P) Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\{|e_i\rangle\}_i$ eine Orthonormalbasis, $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ und $\psi_i := \langle e_i|\psi\rangle$. Zeigen Sie:

$$\langle\psi| = \sum_i \bar{\psi}_i \langle e_i|, \qquad \langle\psi|\phi\rangle = \sum_i \bar{\psi}_i \phi_i.$$

b) (1 P) Sei nun $\mathcal{H}$ der Hilbertraum, der durch $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ aufgespannt wird. Drücken Sie die Operatoren

$$\sigma_z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \qquad \sigma_x = |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$$

jeweils als Matrizen aus. Berechnen Sie das Produkt $\sigma_x\sigma_z$ sowohl im Dirac-Formalismus, wie auch als Matrixprodukt, und überprüfen Sie, dass die Ergebnisse kompatibel sind.

2 Lektkion 3.5: Adjungierte Operatoren

a) (1 P) Sei $A = \sum_{ij} A_{ij}|i\rangle\langle j|$ ein Operator. Zeigen Sie, dass der adjungierte Operator $A^\dagger = \sum_{ij} \bar{A}_{ji}|i\rangle\langle j|$ für alle $|\phi\rangle, |\psi\rangle \in \mathcal{H}$ die Relation $\langle A^\dagger\phi|\psi\rangle = \langle\phi|A\psi\rangle$ erfüllt.

b) (1 P) Zeigen Sie: Für alle $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \in \mathcal{H}, z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\big(z|\alpha\rangle\langle\beta|\big)^\dagger = \bar{z}|\beta\rangle\langle\alpha|.$$

Hinweis: Drücken Sie (wie in Lektion 3.4) alle Operationen in der Basis aus.

3 Lektion 3.6: Selbstadjungierte Operatoren

Sei $A = A^\dagger$ ein selbstadjungierter Operator.

a) (1 P) Zeigen Sie: Alle Eigenwerte von A sind reell.

b) (2 P) Wenn $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind, dann sind sie orthogonal.

Hinweis: $\lambda_j\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \langle\psi_i|A\psi_j\rangle$. Beide Teilaufgaben sind mit je $\simeq 3$ leichten Umformungen lösbar.

4 Lektion 3.6.3: Kontinuierliche Spektren (1 P)

Sei $|k\rangle$ eine ebene Welle mit Wellenzahl k, also $\langle x|k\rangle = (2\pi)^{-1/2}e^{ikx}$. Zeigen Sie die Vollständigkeitsrelation

$$\int_k |k\rangle\langle k| \,\mathrm{d}k = \mathbb{1}$$

in dem Sinn, dass für alle $x \in \mathbb{R}, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle x|\left(\int |k\rangle\langle k| \,\mathrm{d}k\right)|\psi\rangle = \langle x|\psi\rangle.$$

5 Lektion 3.8: Projektoren

a) **(2 P)** Betrachten Sie die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass P eine Projektion ist und berechnen Sie eine Spektraldarstellung.
Hinweis: Rechnen Sie dabei so wenig wie möglich: Insbesondere ist es nicht nötig ein charakteristisches Polynom o.Ä. aufzustellen. Nur, falls Sie in Versuchung geraten wären...

b) **(1 P)** Auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, sei Π der Paritätsoperator, der durch $(\Pi\phi)(x) = \phi(-x)$ definiert ist. Zeigen Sie, dass die beiden Operatoren

$$P_\pm = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm \Pi)$$

Projektoren sind.

Folgende Aufgaben werden in der Online-Veranstaltung besprochen. Bitte vorher anschauen! Sie müssen aber **nicht** abgegeben werden! Es gibt auch keine Punkte.

6 [Online-Veranstaltung] Lektion 3.7: Unitäre Operatoren

a) Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Transformation, deren Jacobi-Determinante gleich 1 ist. Zeigen Sie, dass der Operator U_Φ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$, der durch $(U_\Phi \alpha)(\vec{x}) = \alpha(\Phi^{-1}\vec{x})$ definiert ist, unitär ist.

b) Seien $\{|e_i\rangle\}_i$ und $\{|f_i\rangle\}_i$ zwei Orthonormalbasen. Zeigen Sie, dass $U = \sum_i |f_i\rangle\langle e_i|$ unitär ist. Zeigen Sie umgekehrt, dass – zumindest in endlichen Dimensionen – jeder unitäre Operator von dieser Form ist.

7 [Online-Veranstaltung] Lektion 3.8: Projektoren

Auf welche Räume projezieren die zuvor eingeführten Operatoren $P_\pm$? Etwas schwieriger: Können Sie eine Spektraldarstellung für $P_\pm$ finden?