Quantenmechanik

Mariami Gachechiladze, David Gross

Übungsblatt 3 **Abgabe: 2.5.**

1 Lektion 4.3.5: Baker-Campbell-Hausdorff (2 P)

Die BCH-Formel besagt, dass für Operatoren A und B gilt

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\Big(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \text{Terme höherer Ordnung}\Big).$$

Um das Einzusehen, setzen Sie $A = t\tilde{A}, B = t\tilde{B}$, drücken Sie die Exponentialfunktionen jeweils als Potenzreihen aus, und zeigen Sie, dass die beien Seiten zu zweiter Ordnung in t übereinstimmen.

2 Pauli-Matrizen, Rotationen, und die Bloch-Sphäre

In dieser Übung geht es um die Wirkung von Rotationen auf Spin-1/2-Teilchen und um die Visualisierung ihrer Zustände auf der *Bloch-Sphäre*. Die Resultate werden z.B. in der NMR-Spektroskopie benutzt, um die Bewegung von Spins im Magnetfeld zu beschreiben; und in der Quanteninformation für Ein-Qubit-Quantengatter. Wir werden die Ergebnisse auch für die allgemeine Theorie quantenmechanischer Drehimpulse verwenden.

Die *Pauli-Matrizen* sind

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sie können benutzen, dass die Pauli-Matrizen anti-kommutieren, zu $\mathbb{1}$ quadrieren, und dass das Produkt von je zweien bis auf einen Faktor die dritte ist:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij}\mathbb{1} + \mathrm{i}\sum_k \epsilon_{ijk}\sigma_k. \tag{1}$$

a) **(4 P)** Hier leiten wir den Ausdruck für $|\uparrow^{(\alpha)}\rangle$ ab, der in Lektion 4.3.7 angegeben wurde.

Sei $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor: $\sum_i \omega_i^2 = 1$, sei $\vec{\omega} \cdot \vec{\sigma} := \sum_i \omega_i \sigma_i$ die "Pauli-Matrix in Richtung $\vec{\omega}$." Zeigen Sie

$$\big(\vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}\big)^2 = \mathbb{1}.$$

Benutzen Sie dieses Ergebnis, um zu zeigen:

$$\exp\Big(-\alpha\frac{\mathrm{i}}{2}\vec{\omega}\cdot\sigma\Big) = \cos(\theta/2)\mathbb{1} - \mathrm{i}\sin(\theta/2)\,\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}. \tag{2}$$

Hinweis: Das ist leichter als es aussieht. Nutzen Sie die Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion und der trigonometrischen Funktionen. (Die Formel (2) gibt an, wie allgemeine Rotationen auf ein Spin-1/2-Teilchen wirken).

Leiten Sie damit ab:

$$|\uparrow^{(\alpha)}\rangle := \exp\Big(-\alpha\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_y\Big)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$

b) (4 P) Sei $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2$ ein Zustandsvektor. Zeigen Sie, dass man immer eine global Phase so wählen kann, dass $|\psi\rangle$ von der Form

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{-\mathrm{i}\frac{\phi}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad \theta \in [0, \pi),\ \phi \in [0, 2\pi)$$

ist.

Man kann diesen Zustand als Punkt $\vec{v}$ mit Kugelkoordinaten (θ, ϕ) auf der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ identifizieren. Dies ist der *Bloch-Vektor* des Zustands. Zeigen Sie, dass der Bloch-Vektor die Erwartungswerte der Pauli-Matrizen angibt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \langle\sigma_x\rangle \\ \langle\sigma_y\rangle \\ \langle\sigma_z\rangle \end{pmatrix}$$

Sei $U_{z,\alpha} = \exp\big(-\alpha\frac{\mathrm{i}}{2}\sigma_z\big)$. Zeigen Sie, dass der Bloch-Vektor von $U_{z,\alpha}|\psi\rangle$ aus dem Bloch-Vektor von $|\psi\rangle$ durch eine Rotation um die z-Achse um den Winkel α hervorgeht. (Tatsächlich gilt das allgemeiner: die Matrix in (2) rotiert Bloch-Vektoren um $\vec{\omega}$ – aber das muss hier nicht gezeigt werden).