# Quantenmechanik

Mariami Gachechiladze, David Gross

**Übungsblatt 4** **Abgabe: 09.05.21**

In diesem Zettel geht es um die Zeitentwicklung eines Wellenpakets (Aufgabe 2). Die Integrale die dafür auszurechnen sind, sind zugegeben etwas nervig. Aber es ist eines der wenigen Systeme, die man explizit lösen kann. Deswegen lohnt es sich, das einmal durchzustehen.

Die erste Aufgabe ist eine mathematische Vorbereitung. Wem das zu viel Analysis und zu wenig konzeptionelles Arbeiten ist, der kann stattdessen in Aufgabe 3 die Unschärferelation auf die Musik anweden.

## 1 Gauß-Integral

In Übung 1 haben wir uns bereits mit Gauß-Integralen befasst. Hier gehen wir etwas mehr in die Tiefe und zeigen

$$I(\alpha,\beta) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2(x+\beta)^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha,\beta \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}[\alpha^2] > 0. \tag{1}$$

**a)** **(2 P)** Zeigen Sie $I(\alpha,\beta) = I(\alpha,0)$. Also: das Gauß-Integral ist invariant unter Verschiebungen.

**Hinweis**: Setze $\beta = a + \mathrm{i}b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dass das Integral nicht von $a$ abhängt ist sehr leicht zu sehen! Um das gleiche für $b$ einzusehen, gibt es verschiedene Ansätze. Wer Funktionentheorie mag, löst das per Konturintegral. Wer Analysis bevorzugt, kann zeigen, dass

$$\frac{\partial}{\partial b} f(\alpha, a + \mathrm{i}b) = \mathrm{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} e^{-\alpha^2(x+\beta)^2} \mathrm{d}x = 0.$$

**b)** **(1 P)** Zeigen Sie, dass für reelle $\alpha$ gilt $I(\alpha,0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}$. (Die Formel ist tatsächlich auch für komplexe $\alpha$ gültig! Wer Ambitionen hat, kann das per Konturintegration beweisen – das ist aber freiwillig).

**Hinweis:** Berühmter und nicht-offensichtlicher Trick: Schreiben Sie $I(\alpha,0)^2$ als Doppelintegral über die $x$–$y$ Ebene, und wechseln Sie von rechtwinkligen zu Polarkoordinaten.

## 2 Zeitentwicklung eines Wellenpakets

Wir betrachten ein freies ($V = 0$) Teilchen in einer Dimension, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Der Hamiltonoperator ist also $H = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{(\partial x)^2}$.

**a)** **(1 P)** Sei $|\psi(t)\rangle$ eine Lösung der Schrödingergleichung. Zeigen Sie: $\langle k|\psi(t)\rangle = \langle k|\psi(0)\rangle\, e^{-\mathrm{i}\omega(k)t}$. Hier ist $\omega(k) = \hbar k^2/(2m)$ die *Dispersionsrelation* der Schrödingergleichung, und $|k\rangle$ mit $\langle x|k\rangle = (2\pi)^{-1/2} e^{\mathrm{i}kx}$ ist eine ebene Welle mit Wellenzahl $k$.

**b)** **(1 P)** Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Impulsverteilung durch eine Gaußfunktion gegeben:

$$\langle k|\psi(0)\rangle = \left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2},$$

wobei $a > 0$ und $k_0$ freie Parameter sind, und $k = p/\hbar$ der Impuls in Einheiten der Planck-Konstante. Zeigen Sie, dass mit dieser Wahl die Wellenfunktion normiert ist.

**Hinweis:** Das geht leicht, mit (1).

**c)** **(2 P)** Augen zu und durch! Durch inverse Fourier-Transformation (Zettel 1) ergibt sich

$$\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{\frac{3}{4}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k\, e^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2} e^{i\left(kx - \frac{\hbar k^2}{2m}t\right)}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\psi(x,t) = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}} \exp\left(\frac{-x^2 + ia^2k_0x - ia^2k_0^2t\hbar/2m}{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}\right)$$

**Hinweis:** Bringen Sie mit quadratischer Ergänzung das Integral auf die Form (1).

**d)** **(2 P)** Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte von $\psi(x,t)$

$$|\psi(x,t)|^2 = \left(\frac{2a^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^4 + \frac{4\hbar^2t^2}{m^2}}} \exp\left(\frac{-2a^2(x - \frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{a^4 + \frac{4\hbar^2t^2}{m^2}}\right)$$

ist. Wo ist das Maximum von $|\psi(x,t)|^2$ (als Funktion von $x$), und wie bewegt es sich (als Funktion von $t$)? **Hinweis:** $|e^z|^2 = e^{2\mathrm{Re}(z)}$

**e)** **(1 P)** Die Standardabweichung eines Operators $A$ ist $\Delta A(t) = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}$. Zeigen Sie, dass für $\psi(x,t)$ und für die Orts- und Impulsoperatoren gilt:

$$\Delta x(t) = \frac{a}{2}\sqrt{1 + \frac{4\hbar^2t^2}{m^2a^4}} \quad \text{und} \quad \Delta p(t) = \frac{\hbar}{a}.$$

Zeigen Sie, dass dies mit der Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ konsistent ist.

**Hinweis:** Mit dem richtigen Ansatz ist dies sehr einfach...

## 3 Freiwillige Zusatzaufgabe: Zeit-Frequenz-Unschärfe. (5 Bonus-Punkte)

Die Mathematik der Heisenbergschen Unschärferelation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ findet auch in klassichen Problemen Anwendung.
Wir analysieren einen kurzen Ton, der durch eine zeitlabhängige Auslenkung $\psi(t)$ eines Klangkörpers hervorgerufen wird. Für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage ist die Energie proportional zu $\psi(t)^2$. Daher kann man den zeitlichen Mittelpunkt des Tons durch das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\,|\psi(t)|^2 \mathrm{d}t$$

angeben. Definiert man den Operator $(T\psi) := t\psi(t)$, ist der Mittelpunkt also $\langle T\rangle$ und für die Dauer $\Delta t$ des Tons gilt

$$\Delta t = \sqrt{\langle T^2\rangle - \langle T\rangle^2}.$$

Analog dazu wird die mittlere Frequenz im Fourier-Raum gemessen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\,|\tilde{\psi}(f)|^2 \mathrm{d}f, \quad \text{mit} \quad \tilde{\psi}(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi f t}\psi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Definieren Sie einen Frequenzoperator $F$, so dass die mittlere Frequenz sein Erwartungswert ist. Leiten Sie aus der Vertauschungsrelation $[X, P] = i\hbar$ für den Orts- und Impulsopertor die Vertauschungsrelation von $T$ und $F$ ab und beweisen Sie die Zeit-Frequenz-Unschärferelation $\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$.

Die unten stehenden Noten kodieren gleichzeitig Zeit- und Frequenzinformation. Damit könnten sie der Unschärfebedingung widersprechen. Schätzen Sie für die erste Note grob $\Delta t$ und $\Delta f$ ab und argumentieren Sie, dass hier kein Problem auftritt.


Die tiefste Note, die ein Klavier spielen kann, ist ein A mit Frequenz 27.5 Hz. Macht es Sinn diese note als Zweiunddreißigstelnote zu spielen?