

QUANTENMECHANIK

Mariami Gachechiladze, David Gross

Übungsblatt 5 Abgabe: 16.05.21

1 Der eindimensionale Tunneffekt (10 P)

Betrachten Sie eine eindimensionale rechteckige Potentialbarriere, das heißt

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ V_0 & : 0 < x < d \\ 0 & : x \geq d \end{cases} \quad \text{mit } V_0 > 0.$$

a) (2 P) Die Schrödingergleichung lautet

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x, t).$$

Wir betrachten den Fall $E < V_0$. Zeigen Sie, dass die Lösungen der Schrödingergleichung durch $\psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \varphi(x)$ mit

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{iax} + Be^{-iax} & : x \leq 0 \\ Ce^{ax} + De^{-ax} & : 0 < x < d \\ Fe^{iax} + Ge^{-iax} & : x \geq d \end{cases} \quad \text{mit } a = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

gegeben sind.

b) (2 P) Nehmen Sie $\varphi(x)$ und $\varphi(x)'$ als stetig an. Zeigen Sie, dass diese Annahme auf das folgende lineare Gleichungssystem führt:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{i\alpha}{a} & 1 + \frac{i\alpha}{a} \\ 1 + \frac{i\alpha}{a} & 1 - \frac{i\alpha}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \frac{ia}{\alpha})e^{-\alpha d + iad} & (1 - \frac{ia}{\alpha})e^{-\alpha d - iad} \\ (1 - \frac{ia}{\alpha})e^{\alpha d + iad} & (1 + \frac{ia}{\alpha})e^{\alpha d - iad} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}.$$

c) (2 P) Wir betrachten nur den Fall $G = 0$. In der Vorlesung werden wir sehen, dass wir dann A als Amplitude eines von $x = -\infty$ einlaufenden Teilchens interpretieren können, und F als Amplitude eines nach $x = +\infty$ auslaufenden Teilchens. Daher wird $T(E) = \frac{F}{A}$ als *Transmissionsamplitude* bezeichnet. Zeigen Sie für den *Transmissionskoeffizienten*

$$|T(E)|^2 = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{a}{\alpha}\right)^2\right) \sinh^2 \alpha d}.$$

d) (1 P) Skizzieren Sie $|T(E)|^2$, am besten mit Hilfe eines Computers. Wählen Sie z.B. $\hbar = 1, m = 1/2, V_0 = 10, d = 1$. Wie verhält sich der Transmissionskoeffizient als Funktion der Energie? (Keine Punkte, aber auch interessant: Zeichnen Sie das Verhalten für feste Energie als Funktion der Breite der Barriere d).

e) (3 P) Hier sollen die Wellenfunktionen φ visualisiert werden. Nehmen Sie dazu an: $G = 0, F = 1, m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, und $\hbar = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$. Wählen Sie basierend auf den Resultaten von Übung 1c Werte für E, V_0 , und d , so dass der Tunneffekt gut sichtbar ist. Diesen Parametern, zusammen mit dem Ergebnis von 1b, bestimmen die Wellenfunktion $\varphi(x)$ vollständig. Skizzieren Sie (am Besten mit Hilfe eines Computers), den Realteil, den Imaginärteil und den Absolutquadrat von $\varphi(x)$. Was ist die physikalische Bedeutung der Tatsache, dass die Frequenz vor- und hinter der Barriere gleich ist, während sich die Amplituden unterscheiden?