

# QUANTENMECHANIK

Mariami Gachechiladze, David Gross

Übungsblatt 6 Abgabe: 30.05.21

## 1 Unser Lieblingskind, der harmonische Oszillator (10 P)

Der Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators ist

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m}{2} \omega^2 x^2,$$

und wenn er mit Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $a^\dagger$  und  $a$  dargestellt ist, lautet er

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \mathbb{1} \right),$$

wobei

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{X}{x_0} + i \frac{P}{p_0} \right) \quad \text{und} \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{X}{x_0} - i \frac{P}{p_0} \right)$$

für eine gute Auswahl von  $x_0$  und  $p_0$ .

Um mit solchen Operatoren zu arbeiten, sind die Vertauschungsrelationen  $[a, a^\dagger] = \mathbb{1}$ ,  $[a^\dagger, a^\dagger] = [a, a] = 0$  nützlich, und die Wirkung von  $a$  und  $a^\dagger$  auf die Eigenzustände von  $a^\dagger a$ :

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{und} \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

- a) (1 P) Die *kohärenten Zustände*  $|\alpha\rangle$  sind definiert als Eigenzustände zum Vernichtungsoperator  $a$  mit Eigenwert  $\alpha$ , d.h.  $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ . Ihre Entwicklung nach den Eigenzuständen  $|n\rangle$  des harmonischen Oszillators hat die Form

$$|\alpha\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\alpha) |n\rangle.$$

Bestimmen Sie die Entwicklungskoeffizienten  $f_n(\alpha)$  und den Normierungsfaktor  $C$ . Überprüfen Sie, ob die kohärenten Zustände  $|\alpha\rangle$  und  $|\beta\rangle$  für  $\alpha \neq \beta$  orthogonal sind, indem Sie  $|\langle\beta|\alpha\rangle|^2$  berechnen. Mit diesem Ergebnis, normieren Sie den Quantenzustand  $|\alpha\rangle + |\beta\rangle$ .

- b) (1 P) Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung des kohärenten Zustandes gegeben ist durch

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{1}{2}i\omega t} e^{-\frac{|\alpha_0|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega n t} |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}i\omega t} |\alpha(t)\rangle,$$

wobei  $|\alpha(t)\rangle$  ein kohärenter Zustand mit Eigenwert  $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t}$  ist. Was ist die Grundzustandsenergie? Ist es wichtig für die Zeitentwicklung?

- c) (2 P) Berechnen Sie die *zeitabhängigen* Erwartungswerte des Ortes und des Impulses für den Zustand  $|\alpha(t)\rangle$ . Zeigen Sie damit, dass

$$\frac{d}{dt} \langle \alpha(t) | P | \alpha(t) \rangle = - \langle \alpha(t) | \frac{d}{dx} V(X) | \alpha(t) \rangle$$

ist, für  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ . Was ist die Aussage von dieser Gleichung? Welche physikalische Bedeutung hat der Parameter  $\alpha$ ?

**Hinweis:** Berechnen Sie zuerst  $a|\alpha(t)\rangle$ , und erinnern Sie sich daran, dass  $(A|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|A^\dagger$ . Diese Gleichung ist das berühmte Ehrenfest'sche Theorem, das in der Vorlesung besprochen wird.

d) (2 P) Berechnen Sie das Unschärfeprodukt  $(\Delta X)(\Delta P)$ .

**Hinweis:** Wenn Sie richtig gerechnet haben, sollten Sie das vielleicht überraschende Ergebnis erhalten, dass das Unschärfeprodukt zeitunabhängig ist.

e) (2 P) Betrachten Sie den *ausgelenkten* Grundzustand des harmonischen Oszillators, der in Ortsraumdarstellung gegeben ist als

$$\langle x|0_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{x_0}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-L}{x_0}\right)^2}.$$

Geben Sie seine Entwicklung in der Basis  $|n\rangle$  an und vergleichen Sie dies mit der oben gefundenen Entwicklung des kohärenten Zustandes  $|\alpha\rangle$ .

**Hinweise:** Der Zustand  $|0_L\rangle$  ist der um  $L$  translatierte Zustand  $|0\rangle$ , d.h.  $|0_L\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}LP}|0\rangle$ . Drücken Sie  $P$  durch  $a^\dagger$  und  $a$  aus und verwenden Sie die Baker-Campell-Hausdorff-Formel

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]},$$

gültig für beliebige Operatoren  $A, B$ , deren Kommutator  $[A, B]$  die Beziehung  $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$  beachtet.

f) (2 P) Da die Zeitentwicklung eines kohärenten Zustandes ein kohärenter Zustand ist, muss  $|\alpha(t)\rangle$  die Differentialgleichung

$$a|\alpha(t)\rangle = \alpha(t)|\alpha(t)\rangle$$

erfüllen, und wir können damit seine Ortsraumdarstellung  $\langle x|\alpha(t)\rangle$  finden. Lösen Sie dann

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{X}{x_0} + i \frac{P}{p_0} \right) \langle x|\alpha(t)\rangle = \alpha(t) \langle x|\alpha(t)\rangle$$

und normieren Sie die Lösung, um zu finden, dass

$$\langle x|\alpha(t)\rangle = \sqrt{\frac{p_0}{\pi\hbar x_0}} e^{-\frac{x_0 p_0}{\hbar} \Re(\alpha(t))^2} \exp\left(-\frac{p_0}{2x_0\hbar} x^2 + \frac{p_0 \alpha(t) \sqrt{2}}{\hbar} x\right)$$

ist, modulo eine unwichtige globale Phase.

Der Quantenzustand

$$|\text{cat}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1 + e^{-2|\alpha(t)|^2})}} (|\alpha(t)\rangle + |-\alpha(t)\rangle)$$

ist als Schrödingerkatzenzustand bekannt. Skizzieren Sie in 3D das Betragsquadrat von der Ortsraumdarstellung von  $|\text{cat}(t)\rangle$  als Funktion von  $x$  und  $t$ .