Quantenmechanik

Mariami Gachechiladze, David Gross

Übungsblatt 7 **Abgabe: 06.06.21**

1 Eigenschaften von Drehimpulsoperatoren (3 P)

Seien $L = (L_x, L_y, L_z)$ Drehimpulsoperatoren. Es gilt also $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$ und zyklische Vertauschungen. Die dazugehörenden *Leiteroperatoren* sind $L_\pm = L_x \pm iL_y$, das Drehimpulsquadrat ist gegeben durch $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. Die folgenden Eigenschaften werden in der VL benutzt. Sie alle folgen aus den definierenden Vertauschungsrelationen. Zeigen Sie:

a)

$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm$$

b)

$$L_- L_+ = L^2 - L_z^2 - \hbar L_z$$

c)

$$[L^2, L_z] = 0.$$

2 Bahndrehimpuls in Kugelkoordinaten (2 P)

Der Bahndrehimpuls eines Teilchens mit Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^3)$ ist mit folgenden Drehimpulsoperatoren verbunden

$$\begin{aligned} L_x &= -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \\ L_y &= -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \\ L_z &= -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass diese Operatoren in Kugelkoordinaten diese Form annehmen:

$$\begin{aligned} L_x &= i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\ L_y &= i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\ L_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}. \end{aligned}$$

Beweisen Sie die Behauptung für L_z. **2 Bonuspunkte**: Behandeln Sie auch L_x, L_y.

3 Spin-1 Operatoren (5 P)

In der VL haben wir eine Matrizen-Darstellung für die Spin-1/2 Operatoren hergeleitet. Hier werden wir den nächsten Fall bearbeiten: Spin-1. Der Einfachheit halber setzen wir hier $\hbar = 1$. Benutzen Sie

$$L^2|l,m\rangle = l(l+1)|l,m\rangle,$$
$$L_z|l,m\rangle = m|l,m\rangle,$$
$$L_+|l,m\rangle = \sqrt{(l(l+1) - m(m+1))}|l,m\rangle.$$

a) Zeigen Sie, dass in der Basis $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$ der Operator L_z dargestellt ist als

$$L_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Betrachten Sie die Matrixelemente $\langle 1,m|L_+|1,m'\rangle$. Für welche Werte von m, m' können die Elemente anders als Null sein? Zeigen Sie damit, dass in dieser Basis der Aufsteigeoperator dargestellt ist als

$$L_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Mithilfe von **b**, und der Tatsache dass $L_+^\dagger = L_-$, zeigen Sie dass die Operatoren L_x und L_y dargestellt sind als

$$L_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

d) Zeigen Sie, dass die Operatoren L_x^2, L_y^2, und L_z^2 kommutieren. Finden Sie die Basis in der alle drei Operatoren diagonal sind, und schreiben Sie die Operatoren L_x, L_y, und L_z in dieser Basis.