Quantenmechanik

Mariami Gachechiladze, David Gross

Übungsblatt 9 **Abgabe: 20.06.21**

1 Drehung und Spin-1/2 (6 P)

Wir wollen ein überraschendes quantenmechanisches Phänomen nachvollziehen: dreht man ein Spin-1/2 Teilchen um 360 Grad, geht es *nicht* in den ursprünglichen Zustand zurück.

Erinnern Sie sich an Übungen 2 von Zettel 3 (dies ist eine gute Gelegenheit zur Wiederholung!). Damals haben wir gezeigt, dass

$$U(\theta) = \exp(-i\theta\sigma_x/2) = \cos(\theta/2)\mathbb{1} - i\sin(\theta/2)\sigma_x,$$

eine Drehung um die x-Achse um den Winkel θ (und nicht etwa um $\theta/2$) beschreibt. Man sieht unmittelbar, dass $U(2\pi) = -\mathbb{1}$ gilt. Es folgt, dass der Effekt von $U(2\pi)$ unbeobachtbar ist, wenn man den Operator auf die *gesamte* Wellenfunktion anwendet. Unten führen wir einen weiteren Freiheitsgrad ein, der dafür sorgt, dass die Phase nur auf ein Teilsystem wirkt, und so sichtbar wird.

a) **(1.5 P)** Als Modellsystem betrachten wir ein Spin-1/2 Teilchen mit einem zusätzlichen Freiheitsgrad: es kann sich an einem von zwei Orten befinden. Diese bezeichnen wir mit "1" und "2". Der Hilbertraum $\mathcal{H}$ des Teilchens wird nun von vier Vektoren aufgespannt:

$$|\uparrow, 1\rangle, |\uparrow, 2\rangle, |\downarrow, 1\rangle, |\downarrow, 2\rangle.$$

Also: "Spin nach oben, an Ort 1", "Spin nach oben, an Ort 2", und so weiter.

Wir führen nun eine unitäre Operation H ein, die das Teilchen in eine Überlagerung von Ortszuständen bringt. Sie wirkt auf den Ortsfreiheitsgrad durch

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle), \qquad H|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle).$$

und lässt den Spin unverändert. (Man bezeichnet ein solches H als *Beamsplitter*). Um die Wirkung von H auf die vollständige Basis szudrücken, schreibt man Spin- und Ortsfreiheitsgrade in Produktform $|\uparrow, 1\rangle = |\uparrow\rangle|1\rangle$, wendet H auf den Ort an und multipliziert aus:

$$H|\uparrow, 1\rangle = |\uparrow\rangle(H|1\rangle) = |\uparrow\rangle\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\uparrow, 1\rangle + |\uparrow, 2\rangle\Big).$$

Was ist die Matrixdarstellung von H bezüglich der angegebenen Basis von $\mathcal{H}$?

b) **(1.5 P)** Sei $R(\theta)$ die Operation, die den Spin um den Winkel θ dreht, wenn sich das Teilchen am Ort "1" befindet. Ist das Teilchen hingegen am Ort "2", wird es nicht verändert. Also z.B.

$$R(\theta)(|\uparrow\rangle|1\rangle) = (U(\theta)|\uparrow\rangle)|1\rangle, \qquad R(\theta)(|\uparrow\rangle|2\rangle) = |\uparrow\rangle|2\rangle.$$

Geben Sie die Matrixdarstellung von $R(\theta)$ an.

c) **(3 P)** Betrachten Sie nun folgendes Experiment. Das Teilchen ist anfangs am Ort "1" und sein Spin zeigt nach oben. Wir wenden erst die Operation H an, um das Teilchen auf die beiden Orte zu verteilen. Dann wird $R(\theta)$ realisiert, also eine Drehung $U(\theta)$ am Ort "1". Anschliessend wird ein weiteres Mal H angewandt.

Berechnen Sie den Zustand des Systems nach dem ersten, zweiten und dritten Schritt des Experiments. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit am Ende das Teilchen wieder mit Spin nach oben am Ort "1" zu finden durch

$$\frac{1}{4}\big(\cos\theta/2+1\big)^2$$

gegeben ist. Um wieviel Grad muss man drehen, damit der ursprüngliche Zustand wieder hergestellt wird?

Hintergrund: Diese Rechnung gibt modellhaft ein Experiment wieder, das in den 70er Jahren an Neutronen durchgeführt wurde. Der Titel der Publikation lautet *Verification of coherent spinor rotation of Fermions*. Aus dem Uni-Netz können Sie auf die Arbeit zugreifen.

2 Verletzung der CHSH Ungleichung an quantenmechanischen Systemen (4 P)

In der Vorlesung haben wir das CHSH-Experiment und seine Folgen diskutiert. Wir haben gesehen, dass die folgende Ungleichung gilt, wenn man annimmt, dass man auch ungemessenen Größen einen Wert zuschreiben kann:

$$\mathbb{E}[A_1B_1]+\mathbb{E}[A_1B_2]+\mathbb{E}[A_2B_1]-\mathbb{E}[A_2B_2]\leq 2.$$

Nun betrachten wir ein aus zwei Spin-1/2-Teilchen zusammengesetztes System, jeweils mit dem Hilbertraum $\mathcal{H}=\mathbb{C}^2$ mit Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. Hier zeigen wir, dass die Ungleichung verletzt werden kann, wenn Alice und Bob über zwei Quantensysteme verfügen, die sich im *Bellzustand*

$$|\Phi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle+|\downarrow\downarrow\rangle)$$

befinden.

Die folgenden Matrizen sind selbstadjungiert und haben die Eigenwerte $\{+1,-1\}$:

$$A_1\equiv\sigma_z=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad A_2\equiv\sigma_x=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad B_1=\frac{\sigma_z+\sigma_x}{\sqrt{2}},\quad B_2=\frac{\sigma_z-\sigma_x}{\sqrt{2}}.$$

a) **(2 P)** Zeigen Sie, dass

$$\langle\Phi|\sigma_i\otimes\sigma_j|\Phi\rangle=\delta_{i,j}\quad\text{und}\quad i,j\in\{z,x\}.$$

Hinweis: Berechnen Sie direkt die Wirkung der Pauli-Matrizen auf den Bell-Zustand – so muss das Tensorprodukt der Paulis nicht explizit bestimmt werden.

b) **(2 P)** Verwenden Sie die Ergebnisse in a), um zu zeigen, dass die CHSH-Erwartungswert in der QM den Wert $2\sqrt{2}\approx 2.83$ annehmen kann:

$$\langle\Phi|A_1\otimes B_1|\Phi\rangle+\langle\Phi|A_1\otimes B_2|\Phi\rangle+\langle\Phi|A_2\otimes B_1|\Phi\rangle-\langle\Phi|A_2\otimes B_2|\Phi\rangle=2\sqrt{2}.$$