# Kugeln und Kepler

David Gross
Institute for Theoretical Physics
University of Cologne

July 22, 2021

### 0.0.1 Überblick

Eines der einfachsten Beispiele für die Bewegung von Teilchen unter Zwangsbedingungen ist das "freie Teilchen auf der Kugel". ("Frei" heißt hier, dass das Potential verschwindet). Eines der schwierigsten Probleme das klassisch wie quantenmechanisch in den Bachelor-Vorlesungen gelöst wird, ist die Behandlng eines Teilchens im Kepler-Potential.

Nun eine gute und überraschende Nachricht: Die beiden Probleme sind *identisch*. Die Bewegung der Planeten um die Sonne kann als Bewegung eines freien Teilchens auf einer Kugel verstanden werden. Noch besser: Die Entsprechung funktioniert auch quantenmechanisch.

Die schlechte Nachricht ist, dass es alles andere als trivial ist, die beiden Probleme aufeinander abzubilden. (Das fängt schon damit an, dass die Kugel im *vier*dimensionalen Raum lebt.)

Wir werden im Folgenden mit der Behandlung des freien Teilchens beginnen, und dann ausführlich die Koordinatentransformationen diskutieren, die auf das Kepler-Problem führen.

#### Eine einfache Analogie

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator. Die Bewebung im Ort ist durch $x(t) = A\sin(\omega t)$ gegeben. Die Bahnkurven sind also Intervalle $[-A, A]$. Sie weden nicht gleichförmig durchlaufen: am Ursprung ist die Geschwindigkeit am höchsten, in der Nähe der Umkehrpunkte am niedrigsten. Die Situation wirkt nicht sehr symmetrisch. Beschreiben wir die Dynamik hingegen im Phasenraum, sehen wir sofort, dass die Bahnen *Kreise* sind, die *gleichförmig* durclaufen werden und offenbar *unter Rotationen invariant* sind.

Für das Kepler-Problem finden wir eine ähnliche Relation (wenn auch ungleich komplizierter). Auch hier führt die Beschreibung im Phasenraum auf eine einfachere und viel symmetrischere Geometrie.

#### Ausblick: Symmetrien

Der Zusammenhang zwischen dem Kepler-Problem und Kugeln im vierdimensionalen Raum wurde erst im 20. Jahrhundert durch Fock (quantenmechanisch) und Moser (klassisch) beschrieben. Bereits zwei Jahrhunderte zuvor war bekannt, dass das Kepler-Problem "symmetrischer" ist, als man es für ein Zentralpotential erwarten würde.

Erinnern wir uns: Die Hamiltonfunktion $H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}\|\vec{p}\|^2 + V(\|\vec{q}\|)$ für ein Zentralpotential ist invariant unter Rotationen $R \in \mathrm{SO}(3)$. Es gibt drei unabhängige Erzeugende für Rotationen im dreidimensionalen Raum: Nämlich die Drehungen im die $x$, $y$, bzw. die $z$-Achse. Das Noether-Theorem verbindet damit drei Erhaltungsgrößen. Dies sind die Komponenten des Drehimpulses.

Im Spezialfall des Kepler-Potentials

$$V = -\frac{\kappa}{\|\vec{q}\|}$$

sind bekanntlich auch die drei Komponenten des Runge-Lenz-Vektors

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - m\kappa \frac{\vec{q}}{\|\vec{q}\|}$$

erhalten. (Dies auszurechnen ist eine etwas nervige Übung in der TP1.)

Die *geometrische Bedeutung* dieser Invarianz bleibt in der elementaren Behandlung mysteriös. Hier werden wir sie klären können.

Als Vorgeschmack: Wir haben gesehen, dass die Erzeugenden der Drehgruppe $\mathrm{SO}(3)$ den Elemente des Vektorraums der anti-symmetrischen $3\times 3$-Matrizen entsprechen. Dies gilt analog in für Rotationen $\mathrm{SO}(n)$ in beliebigen Dimensionen. Eine $4 \times 4$-Matrix hat $3 + 2 + 1 = 6$ Nebendiagonalelemente. Wir erwaten also $6$ Erzeugenden und, nach Noether, ebensoviele Erhaltungsgrößen. Dies entspricht der Anzahl der Komponenten des Drehimpulses und des Runge-Lenz-Vektors. Das ist kein Zufall.

Übrigens wird der Runge-Lenz Vektor im englischsprachrigen Raum häufig *Laplace-Runge-Lenz*-Vektor genannt. Wer hat diese Größe *nicht* entdeckt? Laut Goldstein: Laplace, Runge und Lenz. Stiglers Gesetz der Eponyme findet also Bestätigung.

### Literatur

Diese Notizen beruhen auf *Variations on a Theme by Kepler* von Guillemin und Sternberg. (In dem Büchlein wird Carl Runge durchweg als "Rünge" bezeichnet. Ob das ein ehrlicher Fehler ist, oder ob die Autoren sich über die deutschen Umlaute lustig machen wollten, ist mir nicht ersichtlich.) Ein anderer guter Einstieg ist https://math.ucr.edu/home/baez/gravitational.html von John Baez.

### 0.0.2 Steoregraphischen Projektionen

Sei $S^n$ die $n$-dimensionale Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n+1}$. Man kann die $S^n$ mittels einer *stereographischen Projektion* auf den $\mathbb{R}^n$ abbilden. Diese wichtige Abbildung hat viele Anwendungen, z.B. in der Kartographie und der komplexen Analysis (vergl. die [Riemannsche Zahlenkugel]).

Die Idee ist einfach. Die Verbindungslinie zwischen dem Nordpol und einem gegebenen Punkt $\vec{q}$ auf der Einheitskugel schneidet die Äquatorialebene in genau einem Punkt $\vec{P}$. Die Abbildung $\vec{q} \mapsto \vec{P}$ ist die stereographische Projektion.

Konkret: Wir bezeichnen die Komponeten eines Punktes $\vec{q} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\vec{q} = (q_0, q_1, \ldots, q_n) = (q_0, \mathbf{q}).$$

Also das fett gesetzte Symbol $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ steht für die hinteren $n$ Komponenten von $\vec{q}$. Um den Schnittpunkt der Verbindungslinie durch Nordpol und $\vec{q}$ mit der Äquatorialebene $(0, \vec{P})$ zu bestimmen, rechne:

$$\begin{aligned} & (1,\mathbf{0}) + \lambda((q_0,\mathbf{q}) - (1,\mathbf{0})) = (0,\vec{P}) \\ \Rightarrow \qquad & \lambda = \frac{1}{1-q_0} \\ \Rightarrow \qquad & \vec{P} = \frac{1}{1-q_0}\mathbf{q}. \end{aligned}$$

Später benötigen wir auch die Umkehrabbildung $\vec{P} \to \vec{q}$. Um sie zu bestimmen, rechne zunächst

$$\|\vec{P}\|^2 = \frac{1-q_0^2}{(1-q_0)^2} = \frac{1+q_0}{1-q_0}$$

und löse nach $q_0$ auf:

$$q_0 = \frac{\|\vec{P}\|^2 - 1}{\|\vec{P}\|^2 + 1}.$$

Damit erhält man

$$\mathbf{q} = \left(1 - \frac{\|\vec{P}\|^2 - 1}{\|\vec{P}\|^2 + 1}\right)\vec{P} = \frac{2}{\|\vec{P}\|^2 + 1}\vec{P}.$$

### 0.0.3 Kugel zu Kepler

Wir können nun die Bewegungslgeichungen eines Teilchens auf einer Kugel mit Radius $r$ im $\mathbb{R}^{n+1}$ auf das Keplerproblem im $\mathbb{R}^n$ abbilden. Hier schränken wir uns auf den Spezialfall $m = \kappa = 1, n = 3, r = 1$ ein, und betrachten auch nur Bahnen, bei der die Energie des Teilchens auf der Kugel $E = \frac{1}{2}$ beträgt. Der allgemeine Fall folgt analog.

#### Kanonische Koordinaten

Das freie Teilchen im $\mathbb{R}^4$ hat Hamiltonfunktion

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{2}\|\vec{p}\|^2.$$

Wir betrachten nur Orte auf der Einheitskugel $S^3 = \{\vec{q} \in \mathbb{R}^4 \mid \|\vec{q}\| = 1\}$ und Impulse, die dazu tangential liegen:

$$(\vec{p}, \vec{q}) = p_0 q_0 + (\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0. \tag{0.1}$$

Um für das Problem angepasste Koordinaten zu finden, definieren wir zwei Funktionen in den $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p}) = (q_0 - 1)\mathbf{p} - p_0\mathbf{q}, \qquad \vec{P}(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{1}{1-q_0}\mathbf{q}. \tag{0.2}$$

Die Funktion $\vec{P}(\vec{q}, \vec{p})$ ist einfach die stereographische Projektion. Die Funktion $\vec{Q}(\vec{q}, \vec{p})$ wurde so gewählt, dass $(\vec{Q}, \vec{P})$ kanonische Koordinaten sind. Das prüfen wir nun nach (wenn Sie mir das glauben, reicht Querlesen allemale).

Dazu muss zunächst gezeigt werden, dass $(\vec{Q}, \vec{P})$ die kanonischen Poisson-Relationen erfüllen. Also los:

$$\begin{aligned}
\{Q_i, P_j\} &= \{P_i, -Q_j\} \\
&= \left\{ \frac{1}{1-q_0} q_i, (1-q_0)p_j + p_0 q_j \right\} \\
&= \left\{ \frac{1}{1-q_0} q_i, (1-q_0)p_j \right\} + \left\{ \frac{1}{1-q_0} q_i, p_0 q_j \right\} \\
&= \{q_i, p_j\},
\end{aligned}$$

wobei wir genutzt haben, dass $i, j$ in $\{1, 2, 3\}$ liegen und sich $q_0$ in den Klammern daher wie eine skalare Funktkion verhält. Die restlichen Klammern folgen analog.

Es bleibt zu zeigen, dass die Abbildung $(\vec{q}, \vec{p}) \mapsto (\vec{Q}, \vec{P})$ für die Bewegung auf der Einheitskugel invertierbar ist. Die Formel für $\vec{q}(\vec{P})$ haben wir im Abschnitt über die stereographische Projektion bereits abgeleitet. Wir brauchen also noch $\vec{p}(\vec{Q}, \vec{P})$, unter der Nebenbingung (0.1). Das ist nicht schwierig, aber etwas nervig. Zunächst:

$$\begin{aligned}
p_0 &= -p_0 q_0 + p_0(1+q_0) \\
&= -p_0 q_0 + p_0 \frac{1-q_0^2}{1-q_0} \\
&= (\mathbf{p}, \mathbf{q}) + p_0 \frac{\|\mathbf{q}\|^2}{1-q_0} \\
&= -(\vec{Q}, \vec{P}).
\end{aligned}$$

Damit wiederum,

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \frac{1}{q_0 - 1}(\vec{Q} + p_0 \mathbf{q}) \\
&= \frac{1}{q_0 - 1}\vec{Q} + (\vec{Q}, \vec{P})\vec{P} \\
&= \frac{1}{\frac{\|\vec{P}\|^2 - 1}{\|\vec{P}\|^2 + 1} - 1}\vec{Q} + (\vec{Q}, \vec{P})\vec{P} \\
&= (\vec{Q}, \vec{P})\vec{P} - \frac{1}{2}(\|\vec{P}\|^2 + 1)\vec{Q}.
\end{aligned}$$

Für die Hamiltonfunktion ergibt sich:

$$\begin{aligned}
H(\vec{Q}, \vec{P}) &= \frac{1}{2}\|\vec{p}(\vec{Q}, \vec{P})\|^2 \\
&= \frac{1}{2}\left( (\vec{Q}, \vec{P})^2 + (\vec{Q}, \vec{P})^2\|\vec{P}\|^2 + \frac{1}{4}(\|\vec{P}\|^2 + 1)^2\|\vec{Q}\|^2 - (\vec{Q}, \vec{P})^2(\|\vec{P}\|^2 + 1) \right) \\
&= \frac{1}{8}(\|\vec{P}\|^2 + 1)^2\|\vec{Q}\|^2
\end{aligned}$$

Das sieht nicht aus wie das Kepler-Potential. :-(
Wie man dennoch weiterkommt, wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

## Umeichung des Zeitparameters

Wir nutzen zwei Varianten eines Tricks, den man so beschreiben kann: "Eine Reskalierung des Hamiltonschen Vektorfelds entspricht einer Reskalierung des Zeitparameters". Klingt verwirrend? Ist recht einfach.

Zum Aufwärmen: Sei $\vec{x}(t)$ eine Lösung der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für $H$:

$$\frac{\mathrm{d}}{dt}\vec{x}(t) = J\vec{\nabla}H(\vec{x}(t)),$$

wobei $J$ die symplektische Matrix ist. Sei nun $\lambda$ eine Zahl. Definiere die reskalierte Hamiltonfunktion als $K = \lambda H$. Sie erzeugt ein reskaliertes Hamiltonsches Vektorfeld

$$J\vec{\nabla}K = \lambda J\vec{\nabla}H.$$

Man sieht also direkt, dass die Bahn $\vec{y}$ definiert durch $\vec{y}(t) = \vec{x}(\lambda t)$ die Hamiltonsche Bewegungslgeichung für $K$ löst.

Nun die erste Variante, die wir tatsächlich benötigen werden. Statt $K = \lambda H$, wählen wir eine allgemeine Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und setzen $K = u(H)$. Dann ist

$$\vec{\nabla}(u(H(\vec{x})) = u'(H(\vec{x}))\vec{\nabla}H(\vec{x}).$$

Entlang von Lösungen der Hamiltonschen Bewegungsgleichungen ist $H(\vec{x})$ konstant und gleich der Energie $E$ der Bahn. Wir können also wie oben vorgehen, nur dass $\lambda = u'(E)$ nun energieabhängig ist. (Unten werden wir ein $u$ finden, das die Hamiltonfunktion des freien Teilchens in die des Kepler-Problems umwandelt, und als Bonus sogar $\lambda = u'(E) = 1$ erfüllt.)

Nun die zweite Variante des Tricks. Nehmen Sie an, wir hätten eine neue Hamiltonfunktion $K$ gefunden, deren Vektorfeld sich von der ursprünglichen nur durch eine nicht-negative Phasenraumfunktion $\lambda$ unterscheidet:

$$J\vec{\nabla}K(\vec{x}) = \lambda(\vec{x})\, J\vec{\nabla}H(\vec{x}).$$

Im Gegensatz zu den Beispielen zuvor hängt die Umeichung des Zeitparameters nun vom Phasenraumpunkt ab. Explizit: Sei

$$s(t) = \int_0^t \lambda(\vec{x}(t'))\,\mathrm{d}t'.$$

Dann gilt für $\vec{y}(t) = \vec{x}(s(t))$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{x}(t)\right)\lambda(\vec{x}(t)),$$

$\vec{y}(t)$ löst also die Bewegungslgeichung für $K$.

Warum werden wir das benötigen? Nun, ein freies Teilchen bewegt sich mit *konstanter* Geschwindigkeit, wohingegen Planeten in der Nähe des Gravitationszentrums schneller unterwegs sind als weit weg davon. Wenn wir die beiden Probleme aufeinander abbilden wollen, dann wäre es praktisch, wenn ein Term $\lambda(\vec{x})$ auftauchen würde, der eine Funktion des Abstands ist und der dafür sorgt, dass bezügliche $s(t)$ die Planetenbwegung gleichförmig aussieht...

### Anwendung auf das Keplerproblem

Wir hatten zuletzt die Hamiltonfunktion des freien Teilchens auf der Kugel in stereographischen Koordinaten ausgerechnet:

$$H(\vec{Q},\vec{P}) = \frac{1}{8}(\|\vec{P}\|^2+1)^2\|\vec{Q}\|^2.$$

Wir reskalieren die Energie nun mit der Funktion $u(E) = \sqrt{2E}-1$:

$$\begin{aligned} G(\vec{Q},\vec{P}) &= \sqrt{2H(\vec{Q},\vec{P})}-1 \\ &= \frac{1}{2}(\|\vec{P}\|^2+1)\|\vec{Q}\|-1 \\ &= \|\vec{Q}\|\left(\frac{1}{2}\|\vec{P}\|^2-\frac{1}{\|\vec{Q}\|}+\frac{1}{2}\right) \\ &=: \|\vec{Q}\|\left(K(\vec{Q},\vec{P})+\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

wobei mit

$$K(\vec{Q},\vec{P}) = \frac{1}{2}\|\vec{P}\|^2-\frac{1}{\|\vec{Q}\|}$$

zum ersten Mal die Hamiltonfunktion des Kepler-Problems auftaucht!

Wie zuvor angedeutet müssen wir an dieser Stelle nicht einmal die Zeit reskalieren. Rechne:

$$u'(E) = \frac{2}{\sqrt{2E}}-1.$$

Wir hatten uns in der Einführung auf Bahnen mit Energie $H(\vec{Q},\vec{P}) = \frac{1}{2}$ eingeschränkt – es gilt also $u'(1/2) = 1$. Und wo wir gerade dabei sind: Da auf den betrachteten Bahnen $H$ den Wert $1/2$ annimt, ist der Wert von $G = u(H)$ gleich 0 und daher, da $\|Q\|^2$ positiv ist,

$$K(\vec{Q}(t),\vec{P}(t)) = 0. \tag{0.3}$$

Es bleibt noch der Faktor $\|\vec{Q}\|$, also der Abstand zum Ursprung. Wir berechnen seinen Einfluss auf das Vektorfeld an Punkten, wo (wie in (0.3)) $K = 0$ ist:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\Big(\|\vec{Q}\|\left(K+\frac{1}{2}\right)\Big) &= \|\vec{Q}\|\vec{\nabla}K + K\vec{\nabla}\|\vec{Q}\| \\ &= \|\vec{Q}\|\vec{\nabla}K. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also für die Relation der Hamiltonschen Vektorfelder des Kepler-Potentials und des freien Teilchens in stereographischen Koordianten:

$$J\vec{\nabla}K = \frac{1}{\|\vec{Q}\|}J\vec{\nabla}H.$$

Sei also $\vec{x}(t)$ eine Lösung des freien Teilchens, dann ist $\vec{y}(s(t))$ eine Lösung des Kepler-Problems, wobei

$$s(t) = \int_0^t \frac{1}{\|\vec{Q}(t')\|} \, \mathrm{d}t'$$
$$t(s) = \int_0^s \|\vec{Q}(s')\| \, \mathrm{d}s'.$$

In der Astronomie wird $s$ schon seit Jahrhunderten als Bahnparameter bentutzt. Es ist die *exzentrische Anomalie*.

### 0.0.4 Volle Lösung des Keplerproblems

Wir können nun die Lösung des Keplerproblems aud der Lösung des freien Teilchens auf der Kugel ableiten. Die Bahnen des freien Teilchens kann man leicht formal ausrechnen – wir geben hier nur das (intuitive) Ergebnis an.

Betrachten Sie ein Teilchen, das initial an einem Punkt $\vec{q}$ auf der Kugel liegt, mit zur Kugel tangentialem Imnpuls $\vec{p}$. Die Punkte $\vec{q}, \vec{p}$ und der Ursprung liegen auf einer Ebene. Der Schnitt der Ebene mit der Kugel ist ein *Großkreis*. Ein freies Teilchen, das durch Zwangsbedingungen auf der Kugel gehalten wird, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang dieses Großkreises. 1 Wir müssen also die Bilder von Großkreisen unter stereographischen Projektionen analysieren. Dabei hilft folgende einfache Erkenntnis: Wenn man im $\mathbb{R}^{n+1}$ eine Rotation anwendet, die nur auf die letzten $n$ Variablen wirkt, dann dreht sich die stereographische Projektion einfach mit. In unserem Fall: Rotationen im vierdimensionalen Raum, die $\vec{e}_0$ invariant lassen, entsprechen einfach den Drehung des physikalischen Raums. Mit Hilfe einer solchen Operation können wir die Ebene des Großkreis so drehen, dass sie im Raum mit $q_3 = 0$ liegt (im physikalischen Raum also in der $x$-$y$-Ebene). Ein praktischer Nebeneffekt ist, dass die Bewegung nun in einem dreidimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^4$ stattfindet und wir daher mit den vertrauten Kugelkoordinaten arbeiten können. Durch eine weitere Drehung um die $\vec{e}_0$-Achse kann man die Ebene so legen, dass sie die $\vec{e}_1$-Achse enthält; und durch geeignete Wahl des Zeitnullpunkts dass $q_1(0) = 0$. Der einzig verbleibende freie Parameter der Bahnkurve ist dann der Winkel $\alpha$, den der Großkreis mit der $\vec{e}_1$-$\vec{e}_2$-Ebene einschließt. Mit $\epsilon = \sin\alpha$ ist die explizit ist die Lösung also durch

$$\begin{aligned}
q_0(s) &= \sin\alpha\cos s && \text{(durch Projektion zu eliminierende Achse)}\\
q_1(s) &= -\sin s && \text{(physikalische } x\text{-Achse)}\\
q_2(s) &= \cos\alpha\cos s && \text{(physikalische } y\text{-Achse)}
\end{aligned}$$

gegeben. Die Impulse sind einfach die Gewschwindigkeiten ($m = 1$), also:

$$\begin{aligned}
p_0(s) &= -\sin\alpha\sin s\\
p_1(s) &= -\cos s\\
p_2(s) &= -\cos\alpha\sin s
\end{aligned}$$

und, mit $e = \sin\alpha$,

$$\begin{aligned} Q_1(s) &= (1 - e\cos s)\cos s - e\sin^2 s \\ &= \cos s - e, \\ Q_2(s) &= (1 - e\cos s)\sqrt{1-e^2}\sin s + e\sin s\sqrt{1-e^2}\cos s \\ &= \sqrt{1-e^2}\sin s. \end{aligned}$$

Das ist die Parameterisierung der elliptischen Bahnen durch die exzentrische Anomalie (für große Halbachse $a = 1$).

Für den Abstand zum Ursprung gilt

$$\begin{aligned} \|\vec{Q}(s)\|^2 &= \cos^2 s - 2e\cos s + e^2 + (1 - e^2)\sin^2 s \\ &= 1 - 2e\cos s + e^2\cos^2 s \\ &= (1 - e\cos s)^2. \end{aligned}$$

Damit kann die Zeit $t$ ausgerechnet werden, bei der die exzentrische Anomalie $s$ angenommen wird:

$$\begin{aligned} t(s) &= \int_0^s \|Q(s')\|\,\mathrm{d}s' \\ &= \int_0^s (1 - e\cos s')\,\mathrm{d}s' \\ &= t - e\sin s. \end{aligned}$$

Das ist die [Kepler-Gleichung](https://de.wikipedia.org/wiki/Kepler-Gleichung).

### 0.0.5 Die vierdimensionale Drehgruppe

Ziel dieser Notiz ist zu erklären, dass sich die vierdimensionale Drehgruppe wie *zwei unabhängige dreidimensionale Drehgruppen* verhält (jedenfalls für "infinitesimale Drehungen"). Es gibt keinen Grund so eine Gleichheit zu erwarten. Insbesondere treten analoge Resultate in höheren Dimensionen nicht auf. Im Englischen spricht man manchmal von einem *accidental isomorphism* – also eine Gleichheit, die geradezu wie ein Unfall wirkt. Wir werden diesen Unfall aus zwei verschiedenen Perspektiven betrachten.

Wie im Fall $n = 3$ gilt in beliebigen Dimensionen, dass die Erzeugenden der Drehgruppe genau die anti-symmetrischen Matrizen sind. Für $n = 4$ ist eine Erzeugende also durch sechs Parameter beschrieben, z.B. so:

$$r_{\vec{\beta},\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ -\beta_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ -\beta_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\beta_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die untere $3 \times 3$-Blockmatrix erzeugt Drehungen um die $\vec{\omega}$-Achse im dreidimensionalen Raum. Schränken wir uns auf den Block ein, erhalten wir insbesondere die üblichen Vertauschungsrelationen der dreidimensionalen Drehgruppe: Mit

$$a_i := r_{0,\vec{e}_i}, \qquad i = 1, 2, 3$$

ergibt sich also

$$[a_i, a_j] = \epsilon_{ijk} a_k.$$

Um die restlichen Parameter zu verstehen, setzen wir

$$b_i := r_{\vec{e}_i,0}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Die Matrix $b_i$ erzeugt eine Drehung in der $\vec{e}_0$-$\vec{e}_i$-Ebene. Vielleicht etwas überraschend erhält man nun die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [b_i, b_j] &= \epsilon_{ijk} b_k, \\ [a_i, b_j] &= \epsilon_{ijk} b_k. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung sagt, dass die $b$-Matrizen sich selbst wie eine dreidimensionale Drehgruppe verhalten. Die zweite Gleichung sagt, dass die beiden Kopien der Drehgruppe *nicht* unabhängig voneinandern sind. Man kann aber entkoppeln! Dazu wählen wir eine neue Basis für den Raum der anti-symmetrischen $4 \times 4$-Matrizen:

$$X_i = \frac{1}{2}(a_i + b_i) \qquad Y_i = \frac{1}{2}(a_i - b_i) \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dann rechnet man leicht nach:

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &= \epsilon_{ijk} X_k, \\ [Y_i, Y_j] &= \epsilon_{ijk} Y_k, \\ [X_i, Y_j] &= 0. \end{aligned}$$

Die $X$- und die $Y$-Matrizen erzeugen also *unabhängige Kopien der dreidimensionalen Drehgruppe*.

### Eine anderer Blickwinkel auf das Unfallgeschehen

Um diesen Schock zu verarbeiten, schauen wir uns (optional) das gleiche aus leicht anderer Perspektive an. Auf dem 3. Übungszettel der TP2 haben wir nachgerechnet, dass die Spin-$\frac{1}{2}$-Darstellung einer Drehung um den Winkel $\theta$ um den Einheitsvektor $\vec{\omega}$ durch die unitäre $2 \times 2$-Matrix

$$U = \cos(\theta/2)\mathbb{1} - \mathrm{i}\sin(\theta/2)\vec{\omega} \cdot \vec{\sigma}$$

gegeben ist. Bezüglich der Basis $\{\mathbb{1}, i\sigma_x, i_y, i\sigma_z\}$ im Raum der $2 \times 2$-Matrizen hat $U$ also die Entwicklungskoeffizienten

$$\vec{q} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)\omega_x, \sin(\theta/2)\omega_y, \sin(\theta/2)\omega_z).$$

Das ist aber einfach die allgemeine Form eines Vektors auf der Einheitskugel $S^3$ im $\mathbb{R}^4$! Die Einheitskugel im *vier*dimensionalen kann also mit der Spin-$\frac{1}{2}$-Darstellung der *drei*dimensionalen Drehungen identifziert werden. (Hier bahnt sich der Unfall an!)

Eine Rotation ist aber nichts anderes als eine lineare Abbildung, die die Einheitskugel invariant läßt. Um den zufälligen Isomorphismus zu realisieren, müssen wir also zwei unabhängige Arten finden, um mit dreidimensionalen Drehungen linear auf der Menge der Spin-$\frac{1}{2}$-Matrizen zu wirken. Das ist jetzt aber leicht! Seien $R, S$ dreidimensionale Drehungen, und $V, W$ ihre Spin-$\frac{1}{2}$-Darstellungen. Die beiden Abbildungen

$$U \mapsto VU,$$
$$U \mapsto UW$$

vertauschen sicherlich, und bilden Drehungen auf Drehungen ab! Die vierdimensionale Drehgruppe enthält also zwei unabhängige Kopien der dreidimensionalen Drehgruppe. Durch Parameterzählen $(3+3=6)$ sieht man, dass, zumindest für infinitesimale Drehungen, Gleichheit herrschen muss.

### Der Runge-Lenz-Vektor

Wir haben gesehen, dass das Kepler-Problem auf ein freies Teilchen in vier Dimensionen reduziert werden kann. In dieser Formulierung ist offenbar, dass die vierdimensionale Drehgruppe eine Symmetrie der Hamiltonfunktion ist. Es folgt also, dass sie ebenfalls im Phasenraum der dreidimensionalen Formulierung wirkt. Im Prinzip kann man die Wirkung der $b_\beta$-Matrizen auf stereographisch herunterprojezierte Vektoren direkt ausrechnen. In der Praxis macht das aber *überhaupt*keinen Spaß (ich habe die Rechnung nie ausgearbeitet gesehen).

Wir gehen daher indirekt vor. Die Erzeugenden der dreidimensionalen Rotation $a_{\vec{\omega}}$ werden im Phasenraum durch den Drehimpuls $\vec{L} = \vec{p} \times \vec{r}$ dargestellt. Wir wissen zwar nicht, welche Phasenraumfunktionen $\vec{A}'$ die $b_{\vec{\beta}}$ darstellen – es ist aber klar, dass sie Poissonklammern der $\vec{A}'$ die gleichen Relationen verfüllen müssen, wie die Vertauschungsrelationen der vierdimensionalen Drehgruppe. Kann wir damit die $\vec{A}'$ raten?

Das geht! Sei

$$\vec{A} = \frac{1}{2\mu}(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}) - \kappa \frac{\vec{r}}{r}$$

der Runge-Lenz-Vektor. Dann rechnet man nach (macht auch keinen Spaß, geht aber gerade noch):

$$\{A_i, H\} = 0$$

und es gelten die "deformierten" Vertauschungsrelationen:

$$\{A_i, A_j\} = \left(-\frac{2}{\mu}H\right) \epsilon_{ijk} L_k \tag{0.4}$$

$$\{L_i, A_j\} = \epsilon_{ijk} A_k. \tag{0.5}$$

Für $E < 0$ kann man setzen:

$$A'_i = \sqrt{\frac{\mu}{-2E}} A_i$$

und findet direkt

$$\{A'_i, A'_j\} = \epsilon_{ijk} L_k \tag{0.6}$$
$$\{L_i, A'_j\} = \epsilon_{ijk} A'_k. \tag{0.7}$$

Bingo!

### 0.0.6 Anwendung in der Quantenmechanik

Die oben ausgerechneten Vertauschungsrelationen gelten auch in der Quantenmechanik, wie man nachprüfen kann. Wie übliche muss dabei die Poissonklammer durch $i\hbar[\cdot, \cdot]$ ersetzt werden.

Und wo wir gerade war sind, rechnen wir noch folgende Relation nach, die später gebraucht wird:

$$A'^2 + L^2 = -\hbar^2 + \frac{\mu}{2|E|}\kappa^2.$$

Dann Wir betrachten die beiden entkoppelten Darstellungen

$$B_i^{\pm} = \frac{1}{2}\left(L_i \pm A'_i\right).$$

Aus der allgemeinen Theorie des quantenmechanischen Drehimpulses folgt, dass wir eine Basis des Hilbertraums finden können, deren Elemente durch folgenden Quantenzahlen bestimmt wird: $|E, b^+, m^+, b^-, m^-, k\rangle$, wobei $b^p m$ die Drehimpuls-Quantenzahlen sind, und $k$ mögliche Entartungen angibt (es werden keine Entartungen auftreten – das kann man aber leider im algebraischen Zugang nicht beweisen).

Um die Werte von $b^{\pm}$ auszurechnen, zeigen wir zunächst, dass die beiden Drehimpulsquadrate identische Operatoren sind. Wie klassisch bekannt, gilt

$$\vec{L} \cdot \vec{A}' = 0$$

und daher:

$$\begin{aligned}
\hbar^2 b(b+1) = (\vec{B}^{\pm})^2 &= \frac{1}{4}\left(\vec{L}^2 + \vec{A'}^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(-\hbar^2 + \frac{\mu}{2|E|}\kappa^2\right)
\end{aligned}$$

insbesondere also $b^+ = b^- = b$.

Wir lösen nach der Energie auf:

$$|E| = \frac{\mu\kappa^2}{8\hbar^b l(b+1) + 2\hbar^2} = \frac{\mu\kappa^2}{2\hbar^2}\frac{1}{4b^2 + 4b + 1} = \frac{\mu\kappa^2}{2\hbar^2}\frac{1}{(2b+1)^2}.$$

Der Ausdruck suggeriert, dass wir eine neue Quantenzahl $n = 2b + 1$ einführen. Die Energie ist dann, wie gewohnt, eine Funktion von $n$.

Zuletzt wollen wir die Elemente der Basis wieder mit den Eigenwerten von $L^2$ und $L_z$ benennen, statt mit $b, m^+, m^-$. Um auf den alten Drehimpuls zurückzutransformieren nutzen wir $L = B^+ + B^-$. Aus der Theorie der Kopplung von Drehimpulsen wissen wir, dass $l$ die Werte $0, ..., 2b$ annimmt, jeweils ohne Entartung. Für die Entartung der Energie aufgrund der Drehimpulsquantenzahlen ergibt sich also

$$\sum_{l=0}^{2b}(2l + 1) = 2b + 1 + 2\frac{2b(2b + 1)}{2} = (2b + 1)^2 = n^2.$$

Das ist der aus der elementaren Theorie bekannte Wert.

Achtung (das wird in Darstellungen dieses Zugangs manchmal unterschlagen): Wir haben an der Stelle noch nicht die Möglichkeit betrachtet, dass die Quantenzahlen $k$ weitere Entartungen verursachen. Wir wissen also streng genommen nur, dass die Entartung des $n$-ten Energieniveaus ein Vielfaches von $n^2$ ist! Das kann man mit algebraischen Betrachtungen alleine nicht ausschließen (da ja, z.B., ein zusätzlicher, nicht koppelnder Spin-FHG alle Entartungen verdoppelt – die algebraischen Relationen von $H$, $A$ und $L$ aber nicht beeinflußt).