Institut für Theoretische Physik
David Gross, Mariami Gachechiladze

1 Erwartungswerte und Wahrscheinlichkeiten Sei

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|\uparrow\rangle + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)|\downarrow\rangle$$

ein beliebiger Quantenzustand. Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\psi|\sigma_y|\psi\rangle$, die Eigenvektoren von σ_y und die Wahrscheinlichkeiten der beiden möglichen Ereignisse für σ_y-Messungen. Zeigen Sie wie der Erwartungswert mit den Wahrscheinlichkeiten zusammenhängt.

2 Schrödingergleichung auf der Bloch-Sphäre Sei $H = B\,\sigma_y$ der Hamiltonoperator für eine homogenes Magnetfeld parallel zur y-Richtung mit Stärke B. Betrachten Sie ein Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen im Anfangszustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\frac{\pi}{8}}|\uparrow\rangle + e^{-i\frac{\pi}{8}}|\downarrow\rangle)$. Lösen Sie die Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

für dieses System, um die Zeitentwicklung $|\psi(t)\rangle$ zu berechnen. Berechnen Sie zusätzlich die Erwartungswerte $\langle\psi(t)|\sigma_x|\psi(t)\rangle$, $\langle\psi(t)|\sigma_y|\psi(t)\rangle$, und $\langle\psi(t)|\sigma_z|\psi(t)\rangle$ und damit die Periode des Bloch-Vektors von $|\psi(t)\rangle$.

3 Rechteckige Potentialbarriere Betrachten Sie eine eindimensionale rechteckige Potentialbarriere:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \; x \leq 0 \\ V_0 & : \; 0 < x < d \\ 0 & : \; x \geq d \end{cases} \qquad \text{mit} \;\; V_0 > 0\,.$$

Zeigen Sie, dass für $E > V_0$ die Funktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ia_1x} + Be^{-ia_1x} & : \; x \leq 0 \\ Ce^{ia_2x} + De^{-ia_2x} & : \; 0 < x < d \\ Fe^{ia_1x} + Ge^{-ia_1x} & : \; x \geq d \end{cases} \quad \text{mit} \;\; a_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \;\; a_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}.$$

eine Lösung für die zeitunabhängige Schrödingergleichung ist. Nehmen Sie an, dass $G = 0$ gilt (das heiSSt, ein Teilchen laufe aus der Richtung $x = -\infty$ ein), und dass $\varphi(x)$ und $\varphi(x)'$ stetig sind. Zeigen Sie damit, dass

$$D = \frac{1}{2}e^{id(a_1+a_2)}\left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)F,$$
$$C = \frac{1}{2}e^{id(a_1-a_2)}\left(1 + \frac{a_1}{a_2}\right)F,$$
$$A + B = C + D,$$
$$A - B = \frac{a_2}{a_1}(C - D).$$

4 Lineare Störung des harmonischen Oszillators Betrachten Sie eine lineare Störung des harmonischen Oszillators, wie folgt:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \lambda X.$$

Berechnen Sie die *erste nichtverschwindende* Korrektur zu den Energieeigenwerten des ungestörten harmonischen Oszillators mit Hilfe von Störungstheorie. **Hinweis:** Benutzen Sie die Leiteroperatoren.

5 Kugelflächenfunktionen Sei

$$Y_{1,1}(\theta, \varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\varphi}$$

die Kugelflächenfunktion für $l = 1, m = 1$. Berechnen Sie davon ausgehend die Kugelflächenfunktionen $Y_{1,0}(\theta, \varphi)$ und $Y_{1,-1}(\theta, \varphi)$.
Hinweis: Benutzen Sie die Leiteroperatoren.

6 Quantenkorrelationen Sei

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow,\uparrow\rangle + |\downarrow,\downarrow\rangle)$$

ein verschränkter Quantenzustand (*nicht* der Singulett-Zustand) und sei

$$S_\alpha = \sin(\alpha)\sigma_x + \cos(\alpha)\sigma_z$$

die übliche Spin-Observable in Richtung α. Zeigen Sie, dass

$$\langle\phi^+|S^1_\alpha S^2_\beta|\phi^+\rangle = \cos(\alpha - \beta),$$

wobei S^1_α und S^2_β die Spin-Observablen des ersten bzw. zweiten Teilchen sind.