Theoretische Physik II

Sommersemester 2022 — David Gross, David Wierichs
Probeklausur — Institut für Theoretische Physik, Universität zu Köln

Nützliche Formeln

- zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

- zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\hat{H}\psi(x) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

- Impuls- und Ortsoperator in Ortsbasis

$$\hat{P}\psi(x) = -i\hbar\partial_x\psi(x) \qquad \hat{X}\psi(x) = x\psi(x)$$

- Leiteroperatoren harmonischer Oszillator (einheitenlos)

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}).$$

- Wirkung der Pauli Matrizen auf die Basiszustände $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$:

$$\begin{aligned}
&\hat{\sigma}_x|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \qquad &&\hat{\sigma}_y|\uparrow\rangle = i|\downarrow\rangle, \qquad &&\hat{\sigma}_z|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle \\
&\hat{\sigma}_x|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle, \qquad &&\hat{\sigma}_y|\downarrow\rangle = -i|\uparrow\rangle, \qquad &&\hat{\sigma}_z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle
\end{aligned}$$

- Entropie im mikrokanonischen Ensemble:

$$S(U,V,N) = k_B \ln(\#\{\text{Mikrozustände mit E=U}\})$$

- Zustandsgleichung ideales Gas:

$$pV = Nk_BT$$

1 Spin im Magnetfeld (15 Punkte)

Betrachten Sie ein Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen in einem Magnetfeld. Der Hamiltonoperator sei in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ durch

$$H = \frac{\mu B}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dabei ist μ das magnetische Moment des Teilchens und B die Magnetfeldstärke.

a) Das Teilchen befinde sich im Zustand **(3 Punkte)**

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Energie des Teilchens.

b) Allgemeiner befinde sich das Teilchen nun im Startzustand **(9 Punkte)**

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} a(0) \\ b(0) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie den zeitabhängigen Zustand $\psi(t)$, indem Sie die Schrödingergleichung aufstellen und die resultierenden gekoppelten Differentialgleichungen für $a(t)$ und $b(t)$ lösen.

c) *Wie lautet $|\psi(t)\rangle$ für den Startzustand $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$?* **(3 Punkte)**
Mit welcher Wahrscheinlichkeit misst man zum Zeitpunkt t den Zustand $|\uparrow\rangle$?

2 Rechteckiger Potentialtopf (15 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Potential in einer Dimension mit $V_0 > 0$:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ -V_0 & : \quad 0 \leq x < a \\ 0 & : \quad a \leq x \end{cases}$$

a) *Skizzieren Sie das Potential $V(x)$.* **(2 Punkte)**

b) Nehmen Sie an, dass für ein Teilchen $E > 0$ gelte. **(2 Punkte)**
Finden Sie die Werte von k_1 und k_2 als Funktion von E und V_0, so dass die Funktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} & : \quad x < 0 \\ Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} & : \quad 0 \leq x < a \\ Fe^{ik_1x} + Ge^{-ik_1x} & : \quad a \leq x \end{cases}$$

eine Lösung für die zeitunabhängige Schrödingergleichung ist.

c) Wir nehmen nun an, dass kein Teilchen von $x = \infty$ her einlaufe, und setzen daher $G = 0$.

Nennen Sie die geltenden Stetigkeitsbedingungen für $\varphi(x)$ und zeigen Sie, dass **(6 Punkte)**

$$A = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)C + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)D$$
$$B = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)C + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)D$$
$$C = \frac{F}{2}e^{-ik_2a+ik_1a}\left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right)$$
$$D = \frac{F}{2}e^{ik_2a+ik_1a}\left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right)$$

d) *Zeigen Sie, dass die Transmissionsamplitude $T(k_1, k_2) = \frac{F}{A}$ in Abhängigkeit von k_1 und k_2 durch*

$$T(k_1, k_2) = \frac{2k_1^2 e^{-ik_1a}}{(k_1^2 + k_2^2)\cos(k_2a) - 2ik_1k_2\sin(k_2a)}$$

gegeben ist. **(5 Punkte)**

Hinweis: Es muss dazu kein Gleichungssystem gelöst werden, sondern es gilt, alle bereits gefundenen Gleichungen korrekt zu verknüpfen.

3 Harmonischer Oszillator mit elektrischem Feld **(7 Punkte)**

Der (einheitenlose) Hamiltonoperator für den harmonischen Oszillator lautet

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{X}^2).$$

a) Bringt man einen elektrisch geladenen Oszillator in ein elektrisches Feld, so erhält man den Hamiltonoperator **(3 Punkte)**

$$\hat{H}_\epsilon = \frac{1}{2}(\hat{P}^2 + \hat{X}^2) - \epsilon\hat{X},$$

wobei ϵ sowohl die Ladung als auch das elektrische Feld in angepassten Einheiten enthält. *Führen Sie den Operator $\hat{Y}(\lambda) = \hat{X} + \lambda$ ein, und zeigen Sie, dass*

$$\hat{H}_\epsilon = \frac{1}{2}\left(\hat{P}^2 + \hat{Y}(\lambda)^2\right) + c$$

gilt, wenn man c und λ richtig wählt. Geben Sie diese Konstanten an.

b) *Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion* **(4 Punkte)**

$$\psi_\epsilon(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}(x - \epsilon)e^{-\frac{(x-\epsilon)^2}{2}}$$

einen Eigenzustand von $\hat{H}_\epsilon$ beschreibt und berechnen Sie seine Energie.

4 Quantenkorrelationen **(5 Punkte)**

Es seien

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow,\downarrow\rangle + |\downarrow,\uparrow\rangle)$$

ein Quantenzustand von zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen und der Spinoperator $\hat{S}_\alpha$ gegeben durch

$$\hat{S}_\alpha = \cos(\alpha)\hat{\sigma}_x + \sin(\alpha)\hat{\sigma}_z.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert

$$\langle\varphi|\hat{S}_\alpha^{(1)}\hat{S}_0^{(2)}|\varphi\rangle = \cos(\alpha),$$

wobei $\hat{S}_\alpha^{(1)}$ und $\hat{S}_0^{(2)}$ Spinoperatoren des ersten bzw. zweiten Teilchens mit Winkeln α und 0 sind.

5 Thermodynamische Fingerübung **(7 Punkte)**

Betrachten Sie die Entropie

$$S(U,V,N) = \frac{N^2 k_B}{U}\ln\left[\frac{V - rN}{V^2}U\right] - \frac{3}{2}Nk_B$$

mit einem freien Parameter r.

a) *Zeigen Sie, dass S extensiv ist.* **(2 Punkte)**

b) *Berechnen Sie die Temperatur T.* **(2 Punkte)**

c) *Berechnen Sie das chemische Potential $\mu = -T\frac{\partial S}{\partial N}$.* **(3 Punkte)**

6 Ensemble aus zwei quantisierten Oszillatoren **(6 Punkte)**

Ein System bestehe aus zwei harmonischen Oszillatoren, die jeweils die Energieniveaus

$$E_j = (j + \frac{1}{2})\hbar\omega$$

mit $j \in \mathbb{N}_0$ annehmen können.

a) Die Gesamtenergie des Systems sei auf $U = n\hbar\omega$ fixiert. **(2 Punkte)**
Wie viele Mikrozustände sind für das System zugänglich?

b) *Berechnen Sie daraus die Entropie und die Temperator für das System bei Energie U.* **(4 Punkte)**